الرياضيات

الجزء الأول (التحليل)

مؤسسة سما التعليمية

للصف الثالث الثانوي العلمي

للعام 2025-2026

اساسيات التحليل

1. دراسة إشارة عبارة جبرية:

نميز الحالات الآتية:

♣ حالة $ax+b$ أو $(ax+b)(a'x+b')$ أو $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$: نعدم العبارات ثم ننظم جدول الإشارة .

♣ حالة ax^2+bx+c : نوجد $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ وهنا عندما يكون:

$\Delta<0$ فإن إشارة العبارة مثل إشارة a موجب تماماً أو سالب تماماً.

$\Delta=0$ فإن إشارة العبارة مثل إشارة a موجب أو سالب ويساوي الصفر فقط عندما $x=-\dfrac{b}{2a}$

$\Delta>0$ فإن بين الجذرين يخالف إشارة a وخارجهما موافق حيث الحلين هما $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

♣ أحياناً نحاول استعمال المتطابقات أو القواعد العامة

♣ أخيراً يمكن أن نلجأ دراسة تغيرات التابع.

مثال1: ادرس إشارة التابع f في كلا مما يأتي:

(1) $f(x)=2x-8$: $2x-8=0\Rightarrow x=4$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$2x-8$		$-$	0	$+$	

(2) $f(x)=(2x-4)(1-x)$:

$2x-4=0\Rightarrow x=2,\qquad 1-x=0\Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(2x-4)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(3) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+1}$:

$x-4=0\Rightarrow x=4,\qquad x+1=0\Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\dfrac{x-4}{x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

(4) $f(x)=x^2-x+5$:

$\Delta=b^2-4ac=1-4(1)(5)=-19<0$

فإن إشارة التابع مثل إشارة a موجب تماماً أي $f(x)>0$.

(5) $f(x)=x^2+8$ نلاحظ أن التابع موجب تماماً أي $f(x)>0$.

[1] ادرس إشارة كل من المقادير:

ⓐ $f(x)=-2x+6$ ⓑ $f(x)=(3-x)(2+x)$

ⓒ $f(x)=\dfrac{2x+4}{-x+1}$ ⓓ $f(x)=x^2-2x-3$

ⓔ $f(x)=x^2-2x+7$ ⓕ $f(x)=x^2-4x+4$

ⓖ $f(x)=|x^2-2x|$ ⓗ $f(x)=2x^2+3$

الحل:

2. نزع القيمة المطلقة:

ندرس إشارة ما داخلها فإذا كان موجب يبقى ذاته وإذا كان سالب نعكس اشارته أي نكتب: $|f(x)| = f(x)$ إذا كان f موجب و $|f(x)| = -f(x)$ إذا كان f سالب.

مثال:2

$|3| = 3$, $|-3| = +3$

$|\sqrt{2}-\sqrt{3}| = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $|x^2+3| = x^2+3$

[2] اكتب بعبارة مستقلة عن القيمة المطلقة.

ⓐ $f(x) = |x^2+4|$ ⓑ $f(x) = |-2x+4|$

ⓒ $f(x) = |x^2-2x+1|$ ⓓ $f(x) = |x^2-9|$

الحل:

3. مجموعة التعريف (D) :

كل تابع لا يحوي (كسر أو جذر أو لوغاريتم $\ln$) معرف على $\mathbb{R}$

♣ **شرط الكسر**: المقام لا يساوي الصفر $0 \neq$

♣ **شرط الجذر من المرتبة الزوجية**: داخله أكبر أو يساوي الصفر $0 \leq$

♣ **شرط ln**: ما داخله أكبر تماماً من الصفر $0 <$

مثال:3 جد مجموعة التعريف D للتابع f في كلا مما يأتي:

(1) $f(x) = 2x^3-8x^2-x+1$: $D = \mathbb{R}$

(2) $f(x) = \cos x + \sin x$: $D = \mathbb{R}$

(3) $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$: معرف بشرط $x+1 \neq 0$ أي $x \neq -1$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(4) $f(x) = \sqrt{x-2}$: معرف بشرط $x-2 \geq 0$ أي $x \geq 2$

$D = [2,+\infty[$

(5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$: الشرط $x^2+1 \neq 0$ و هذا شرط محقق دوماً لذلك $D = \mathbb{R}$

(6) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$: معرف بشرط $x^2+3 \geq 0$ و هذا محقق دوماً لذلك $D = \mathbb{R}$

في حال وجود tan, cot نتعامل معهما مثل حالة الكسر ويكون

♣ شرط **tan g**: $g \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+\pi k \ : k \in \mathbb{Z}\}$

♣ شرط **cot g**: $g \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k \ : k \in \mathbb{Z}\}$

(7) $f(x) = \tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}$: معرف بشرط $\cos 2x \neq 0$

أي $2x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k : k \in \mathbb{Z}$ ومنه $x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\}$

[3] جد مجموعة التعريف D للتابع f

ⓐ $f(x) = x^2-2x+7$ ⓑ $f(x) = \dfrac{2x+4}{-x+1}$

ⓒ $f(x) = \sqrt{2x-4}$ ⓓ $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+1}$

الحل:

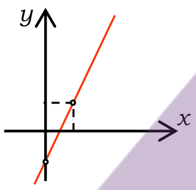
4. رسم المستقيم المائل y = ax +b

لرسم هذا المستقيم نحتاج الى نقطتين نوجدهما من الجدول

x	0	1
y		

مثال4: ارسم المستقيم $y = 2x - 1$

x	0	1
y	-1	1

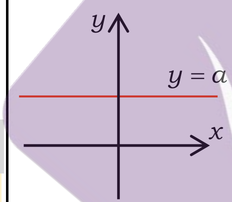


▪ **المستقيم الافقي** $y = a$

هو مجموعة النقاط التي ترتيبها يساوي a

وهو مستقيم يوازي محور الفواصل Ox

(محور الفواصل معادلته $y = 0$)

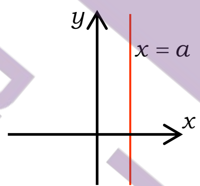


▪ **المستقيم الشاقولي** $x = a$

هو مجموعة النقاط التي فواصلها a

هو مستقيم يوازي محور التراتيب Oy

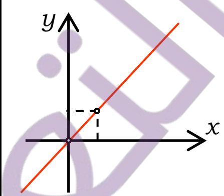
(محور التراتيب معادلته $x = 0$)



▪ **منصف الربع الأول والثالث**

هو مستقيم معادلته $y = x$

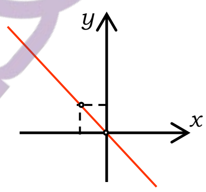
وميله $m = 1$



▪ **منصف الربع الثاني والرابع**

هو مستقيم معادلته $y = -x$

وميله $m = -1$



♣ المستقيم الذي يحوي y فقط هو مستقيم افقي ميله $m = 0$.

♣ المستقيم الذي يحوي x فقط هو مستقيم شاقولي ليس له ميل.

♣ المستقيم الذي يحوي y , x يسمى مائل وميله m.

[4] ارسم المستقيم المعطى :

ⓐ $y = 2x$ ⓑ $y = 2x + 1$ ⓒ $y = 2$ ⓓ $x = 3$

الحل:

5. إيجاد ميل مستقيم:

♣ ميل مستقيم **عُلمت معادلته:** نعزل y في طرف فيكون أمثال x هو الميل.

♣ ميل مستقيم **عُلمت نقطتين منه:** نوجد فرق التراتيب على فرق الفواصل.

مثال5: جد ميل كل من المستقيمات الآتية:

(1) $y = 4x - 5 \Rightarrow m = 4$

(2) $y + 5x + 3 = 0 \Rightarrow y = -5x - 3 \Rightarrow m = -5$

(3) $2y - 3x = 0 \Rightarrow 2y = 3x \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}x \Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$

(4) المستقيم يمر من النقطتين $A(1,2)$, $B(3,5)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$$

[5] جد ميل كل المستقيمات:

ⓐ $y = -2x + 7$ ⓑ $3y - 2x + 1 = 0$

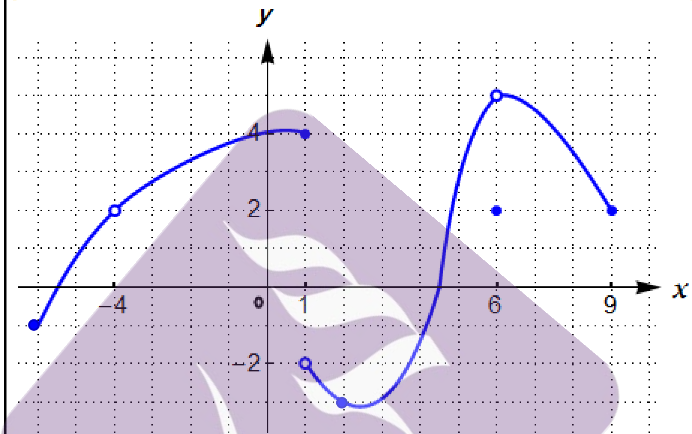
ⓒ $A(3,0)$, $B(-1,2)$ ⓓ $A(3,-2)$, $B(-3,5)$

الحل:

النهايات

1. النهاية عند عدد بيانيا:

نقول إن نهاية f عند a هي ℓ إذا تجمعت قيم $f(x)$ قرب ℓ عندما تصبح x قريبة بما يكفي من a. ونكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.



عند 1	عند 2
عند -4	عند 6
عند -6	عند 9

قواعد على $\pm\infty$:

$\frac{a}{\pm\infty}=0$, $\frac{1}{0^+}=+\infty,$ $\frac{1}{0^-}=-\infty,$ $\frac{+\infty}{0^+}=+\infty,$ $\frac{+\infty}{0^-}=-\infty,$

$+\infty+\infty=+\infty,\ +\infty\pm a=+\infty,\ \infty\times\infty=\infty$

2. النهاية عند عدد a:

♣ في التوابع (كثير الحدود والكسري والمرجعية) نعوض مكان كل x بـ a أي $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

♣ في حال وجود صفر في المقام ندرس إشارة المقام.

مثال 1: جد نهاية كل من التوابع الاتية:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x-1)=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{-2x+7}{x-1}\right)=\frac{5}{0^+}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{-2x+7}{x-1}\right)=\frac{5}{0^-}=-\infty$ حيث

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

لا يوجد نهاية عند 1

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{-2x+7}{(x-1)^2}\right)=\frac{5}{0^+}=+\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{-2x+7}{\sqrt{x-1}}\right)=\frac{5}{0^+}=+\infty$

♣ إذا كان الناتج للنهاية عدد حقيقي نقول ان للتابع نهاية حقيقية.
أما اذا كان الناتج $+\infty$ او $-\infty$ نقول ان للتابع نهاية ولكنها غير حقيقية.
واما اذا كانت النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار أو وجد عدة نتائج عندئذ نقول انه ليس للتابع نهاية.

[1] ادرس نهاية التابع f عند a.

ⓐ $f(x)=\frac{x-3}{x-1}$, $a=1$ ⓑ $f(x)=\frac{x^2+2}{x-2}$, $a=2$

ⓒ $f(x)=\frac{2x-1}{-x+1}$, $a=1$ ⓓ $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-4}$ $a=-2$

ⓔ $f(x)=\frac{x+2}{(x-2)^2}$, $a=2$ ⓕ $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}}$, $a=-2$

الحل:

3. النهاية عند $\pm\infty$:

نعوض مكان كل x بقيمة النهاية $\pm\infty$ وفي الحالات التالية:

♣ حالة كثير الحدود: $a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ نعوض في الحد الأعلى درجة أي الحد المسطر .

♣ حالة التابع الكسري: (كسر بسطه ومقامه كثيرا حدود) نوجد نهاية قسمة الحد المسيطر في البسط والمقام.

مثال1: جد نهاية كل من التوابع الاتية:

(1) $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 2x^2 + x - 1) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+7}{3x+5}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x}{3x}\right) = \dfrac{2}{3}$

(3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+6}{x^2-3x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}(x) = +\infty$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+6}{x^2-3x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right) = 0$

(5) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 + 3\sqrt{x}\right) = +\infty + \infty = +\infty$.

[2] احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

ⓐ $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ ⓑ $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

الحل:

ملاحظة: عند وجود مقدار وجذره نضرب البسط والمقام بالجذر.

[3] ادرس نهاية التابع f عند a.

ⓐ $a=+\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

ⓑ $a=\mp\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{-x^2-1}{x^2+x-2}$

ⓒ $a=-\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$

ⓓ $a=+\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x-3}$

الحل:

التوابع المرجعة: هي $|x|, \dfrac{1}{x}, x^2, e^x, \ln x, \sqrt{x}, \cos x, \sin x$

إذا كانت حشوة التابع غير x نسميه مركب مثل $x \mapsto \sqrt{x}$ تابع مرجعي و $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ تابع مركب و $x \mapsto f(x^2+x)$ تابع مركب.

4. نهاية التابع المركب :

نوجد نهاية مضمون التابع فينتج b ثم نكتب نهاية التابع تساوي نهاية التابع المرجعي عندما x تسعى الى b .

مثلا: لإيجاد $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}$ نوجد $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ثم نكتب $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\lim\limits_{X\to b}\sqrt{X}=\sqrt{b}$.

مثال2: جد نهاية كل من التوابع الاتية:

(1) $a=+\infty$ $\quad f(x)=\sqrt{x^3-x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x)=\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3-x})=\lim\limits_{X\to\infty}(\sqrt{X})=\sqrt{\infty}=\infty$

(2) $a=+\infty$ $\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{8x+1}{2x+3}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{8x+1}{2x+3})=4$ ومنه $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{\dfrac{8x+1}{2x+3}})=\lim\limits_{X\to 4}(\sqrt{X})=\sqrt{4}=2$

[4] ليكن f معرفا على مجموعة D احسب نهاية f عند a.

ⓐ $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$, $a=-\infty$ $\quad D=]-\infty,1[$

ⓑ $f(x)=\sqrt{-x^3+x^2+x}$, $a=-\infty$ $\quad D=\left]-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

ⓒ $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$, $a=+\infty$ $\quad D=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

الحل:

[5] ليكن f التابع المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{x-3}{x+5}$.

ⓐ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

ⓑ اكتب $f(f(x))$ بدلالة x ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.

الحل:

[6] ليكن g التابع المعرف على $]3,+\infty[$ وفق $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$.

اكتب $g(g(x))$ بدلالة x ثم جد $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$.

الحل:

5. مبرهنة الإحاطة)

♣ لتكن $g(x)\le f(x)\le h(x)$ وكان $\lim g(x)=\lim h(x)=\ell$

عندئذ $\lim f(x)=\ell$.

♣ **غالبية:** نستعملها في $\sin(\pm\infty),\ \cos(\pm\infty),\ E(\pm\infty)$.

♣ وفي مبرهنة الإحاطة نستعمل المحدوديات الاتية:

$$-1\le\sin x\le1, -1\le\cos x\le1,\quad 0\le\sin^2 x\le1,$$

$$0\le\cos^2 x\le1,\ (\ )^2\ge0,\ \sqrt{\ }\ge0,\ |\ |\ge0$$

مثال3: جد النهاية $\lim\limits_{x\to0} x^2.\cos\dfrac{1}{x}$.

الحل: إن $-1\le\cos\dfrac{1}{x}\le+1$ أيا كانت $x\in\mathbb{R}^*$ نضرب بـ x^2:

$$-x^2\le x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\le x^2$$

$$\lim_{x\to+\infty}-x^2=\lim_{x\to+\infty}x^2=0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

[7] f المعرف وفق $f(x)=\dfrac{3x+\cos x}{x}$. أيا يكن $x>1$.

ما نهاية f عند $+\infty$.

الحل:

[8] f المعرف وفق $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$. أيا يكن $x>1$.

ⓐ أثبت أن $\dfrac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\dfrac{2x+1}{x-1}$ ⓑ ما نهاية f عند $+\infty$.

الحل:

[9] جد نهاية $f:x\mapsto\dfrac{\cos x}{x+1}$ عند $-\infty$.

الحل:

[10] لدينا $\dfrac{3x+\cos x}{x}\le f(x)\le\dfrac{3x+7}{x-1}$ ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

الحل:

6. مبرهنة (المقارنة) :

لتكن المترجحة $g(x)\le f(x)$.

♣ إذا كان $\lim g(x)=+\infty$ ، عندئذ $\lim f(x)=+\infty$.

♣ إذا كان $\lim f(x)=-\infty$ ، عندئذ $\lim g(x)=-\infty$.

مثال4: جد نهاية التابع $f:x\mapsto 2x+\cos x$ عند $+\infty$.

الحل: لدينا $-1\le\cos x\le 1$

نضيف $2x$: $2x-1\le 2x+\cos x\le 2x+1$ أي

$$2x-1\le f(x)\le 2x+1$$

وحسب مبرهنة المقارنة نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

[11] f يحقق $f(x)\ge\dfrac{1}{4}x^2$ ، $x<0$. ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

الحل:

[12] f يحقق $f(x) \le -x^2$ ، $x < 0$. ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

الحل:

[13] ادرس نهاية التابع f عند a .

ⓐ $a = -\infty$ $f(x) = 2x^2 - 5\sin x$ ⓑ $a = +\infty$ $f(x) = 2x + \sin^2 x$

ⓒ $a = -\infty$ $f(x) = x^3(2 + \cos x)$ ⓓ $a = -\infty$ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

ⓔ $a = 0$ $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ ⓕ $a = +\infty$ $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{x}$

الحل:

سما المجد التعليمية

[14] (دورة 1 – 2018) g معرف وفق $g(x)=\dfrac{1}{3+\cos x}$.

ⓐ أثبت أن g محدود. ⓑ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3+\cos x}$.

الحل:

مبرهنة 3: إذا كان $|f(x)-\ell|\le g(x)$. وكان $\lim g(x)=0$ ، عندئذ $\lim f(x)=\ell$.

[15] لدينا $|f(x)-3|\le\dfrac{1}{x+1}$ ، $x\ge0$. ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

الحل:

[16] لدينا $|f(x)+3|\le\dfrac{\sin^2 x}{x^2+1}$. ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

الحل:

7. حالات عدم التعيين:

هي: $\pm\infty \times 0 \qquad +\infty-\infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

أي النتيجة غير معروفة وهنا نتبع أسلوب أخر

حالة $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$:

- في الحالة العامة نخرج من البسط والمقام عامل مشترك.

مثال5: جد نهاية f المعرف وفق $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+3}$ عند $+\infty$.

الحل:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+3}=\frac{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1+\frac{3}{x})}=\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{3}{x}}=1$$

[17] ادرس في كل حالة نهاية التابع f ، عند a .

ⓐ $a=+\infty \quad f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ ⓑ $a=+\infty \quad f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

ⓒ $a=+\infty \quad f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ ⓓ $a=+\infty \quad f(x)=\frac{x^2+x+\sqrt{x}}{x^2+1}$

ⓔ $a=+\infty \quad f(x)=\frac{-x-\sqrt{x}}{x-1}$ ⓕ $a=+\infty \quad f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

الحل:

حالة $+\infty-\infty$:

في الحالة العامة نخرج عامل مشترك .

وفي حالة الجذر (أي في حالة وجود حدين أحدهما جذر والآخر جذر أو كثير حدود): نربع الحدين إذا كان مسيطر = مسيطر نضرب البسط والمقام بالمرافق وإلا نخرج من داخل الجذر x^2 عامل مشترك.

مثال6: جد نهاية $f(x)=\sqrt{x^2+3}-x$ عند $+\infty$.

$$f(x)=\sqrt{x^2+3}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x}$$

$$f(x)=\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}=\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

سما المجد التعليمية

مثال7: جد نهاية f المعرف وفق $f(x)=\sqrt{x+3}-x$ عند $+\infty$.

$$f(x)=\sqrt{x+3}-x=\sqrt{x^2(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})}-x=|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x$$

$$=x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x=x(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-1)$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-1)=\infty(0-1)=-\infty$$

[18] ادرس في كل حالة نهاية التابع f ، عند a .

ⓐ $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ $\quad a=+\infty$ ⓑ $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ $\quad a=-\infty$

ⓒ $f(x)=\sqrt{1+x^2}-2x$ $\quad a=+\infty$ ⓓ $f(x)=\sqrt{1-2x}+x$ $\quad a=-\infty$

ⓔ $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ $\quad a=+\infty$ ⓕ $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$ $\quad a=-\infty$

الحل:

التعليمية المجد سما

حالة $\frac{0}{0}$:

الحالة	الدلالة	الطريقة
$\frac{0}{0}$	$\sin 0$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
	$1-\cos 0$	مرافق أو $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$
	جذر	مرافق
	عامة	مطابقات أو تحليل

مثال8: جد نهاية f المعرف وفق $f(x)=\frac{\sin(3x)}{x}$ عند 0.

$$f(x)=\frac{\sin(3x)}{x}=3\frac{\sin(3x)}{3x}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\3x\to 0}} 3\frac{\sin(3x)}{3x}=3\times 1=3$$

مثال9: جد نهاية f المعرف وفق $f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ عند 0.

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos(x))}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$=\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos(x))}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=(1)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال10: جد نهاية f معرف وفق $f(x)=\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$ عند 2.

$$f(x)=\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}=\frac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}$$

$$f(x)=\frac{3x-2-4}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}=\frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}=\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}=\frac{3}{4}$$

حالة $0\times\pm\infty$:

في الحالة العامة فك أقواس وإلا مثل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

مثال11: جد نهاية f معرف وفق $f(x)=\frac{1}{x}(2x-\sin x)$ عند 0.

$$f(x)=\frac{1}{x}(2x-\sin x)=2-\frac{\sin x}{x}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

[19] ادرس في كل حالة نهاية التابع f ، عند a .

ⓐ $f(x)=\frac{\sin(x-2)}{x-2}$ $a=2$ ⓑ $f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$ $a=0$

ⓒ $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $a=3$ ⓓ $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ $a=0$

ⓔ $f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ $a=1$ ⓕ $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $a=-1$

الحل:

[20] ادرس في كل حالة نهاية التابع f .

ⓐ $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ $a=0$ ⓑ $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $a=0$

ⓒ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ $a=1,-2$ ⓓ $f(x)=\dfrac{\sin^2(x-2)}{x^2-4x+4}$ $a=2$

ⓔ $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $a=-2,1$ ⓕ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ $a=1$

ⓖ $f(x)=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-9}$ $a=-3$ ⓗ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $a=0$

الحل:

8. استعمال تعريف النهاية:

هنا يمكن الاستفادة من بعض الخواص:

- لحساب مجهول موجود في البسط والمقام من نفس الدرجة نقسم البسط على المقام قسمة اقليدية ثم نكتب الكسر يساوي ناتج القسمة + باقي القسمة على المقسوم عليه.
- $-a < x < a \Leftrightarrow |x| < a$ أي عند وجود مقدار بين عدد ومعكوسه نحذف الجزء السالب ونضع المقدار بالقيمة المطلقة.
- لا يمكن قلب طرفي متراجحة إلا إذا كان طرفيها من نفس الإشارة
- نغير جهة التراجح عند الضرب أو القسمة على سالب أو قلب الطرفين.
- مركز المجال $]a,b[$ هو $c = \dfrac{a+b}{2}$
- نصف قطر المجال $]a,b[$ هو $r = \dfrac{b-a}{2}$

مثال12: f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-3/2\}$ وفق $f(x) = \dfrac{4x-5}{2x+3}$. عين العدد A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05.

الحل: $f(x)$ ينتمي إلى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05 إذا تحققت المتراجحة

$$|f(x)-c| < r$$
$$|f(x)-2| < 0.05$$
$$\left|\frac{4x-5}{2x+3}-2\right| < \frac{5}{100}$$
$$\left|\frac{-11}{2x+3}\right| < \frac{1}{20}$$
$$\frac{11}{|2x+3|} < \frac{1}{20}$$
$$|2x+3| > 220$$
$$220 < 2x+3$$
$$x > 108.5 \Rightarrow A = 108.5$$

مثال13: جد نهاية للتابع $f : x \mapsto \sqrt{4x+1}$ عند 2. ثم عين مجالا I مركزه 2 يحقق الشرط: إذا كان x من المجال I، كان $f(x)$ من المجال $J =]2.99, 3.01[$.

الحل:

$$f(x) \in]2.99, 3.01[$$
$$2.99 < \sqrt{4x+1} < 3.01$$
$$2.99^2 < 4x+1 < 3.01^2$$
$$\frac{2.99^2-1}{4} < x < \frac{3.01^2-1}{4}$$
$$1.985025 < x < 2.015025$$

يمكننا أخذ المجال $I =]1.99, 2.01[$

مثال14: جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1، ثم عين عددا α يحقق الشرط: إذا كان x عنصرا من المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ مختلفا عن 1، كان $f(x)>10^3$.

الحل:

$$f(x)>10^3$$

$$\frac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$$

لدينا $x\to 1 \Rightarrow 5x-1\to 4 \Rightarrow 5x-1>0.1$

أي $\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>\dfrac{0.1}{(x-1)^2}$

لذلك نبحث عن x التي تجعل $\dfrac{0.1}{(x-1)^2}>10^3$

وبذلك يتحقق $\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$

$\dfrac{0.1}{(x-1)^2}>10^3$ نضرب بـ 10 فنجد $\dfrac{1}{(x-1)^2}>10^4$

نجذر الطرفين $\dfrac{1}{|x-1|}>10^2$

ومنه $|x-1|<\dfrac{1}{10^2}$ أي $-\dfrac{1}{10^2}<x-1<\dfrac{1}{10^2}$

أي $1-\dfrac{1}{10^2}<x<1+\dfrac{1}{10^2}$

$x\in]1-\dfrac{1}{10^2},1+\dfrac{1}{10^2}[$ ومنه $\alpha=\dfrac{1}{10^2}$

[21] احسب نهاية f : $f(x)=\dfrac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$، ثم أعط عددا A يحقق: إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$.

الحل:

[22] أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+3}$ عند $-\infty$، ثم أوجد عددا A يحقق الشرط: إذا كان $x<A$، كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$.

الحل:

سما المجد التعليمية

[23] f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ وفق $f(x)=\dfrac{3x-5}{2x+4}$. عين العدد A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه $\dfrac{3}{2}$ ونصف قطره 0.5.

الحل:

[24] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق: $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

a) جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x)$.

b) أوجد مجالاً I مركزه 1 يحقق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I، انتمى $f(x)$ إلى المجال $]0.4,0.6[$.

الحل:

[25] أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$ عند 5، ثم أوجد مجالا I مركزه 5 يحقق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I، انتمى $f(x)$ إلى المجال $]3.95,4.05[$.

الحل:

[26] ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$.

ⓐ جد نهاية f عند 1.

ⓑ جد مجالا مركزه 1 يحقق $f(x)>10^6$.

الحل:

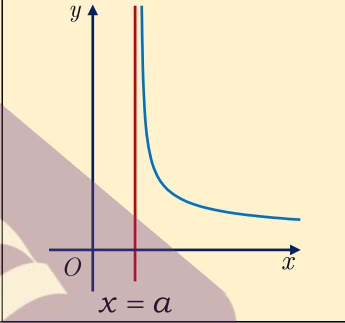
سما المجد التعليمية

المقاربات

1. المقارب الشاقولي:

إذا كان $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$

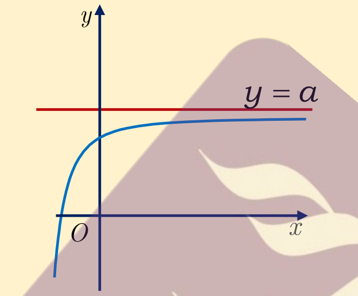
فإن $x=a$ مقارب شاقولي لـ C



2. المقارب الافقي:

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$

فإن $y=a$ مقارب افقي لـ C في جوار $\pm\infty$

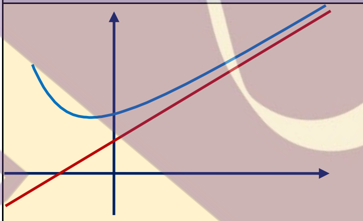


3. المقارب المائل:

إذا كان

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-y_{\Delta}]=0$

فإن $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل لـ C في جوار $\pm\infty$



4. الوضع النسبي مع المقارب:

مع $x=a$: $x\to a^{+}$ يكون C يقع على يمين المقارب

و $x\to a^{-}$ يكون C يقع على يسار المقارب

مع $y=a$ أو $\Delta: y=ax+b$ ندرس إشارة $f(x)-y_{\Delta}$

فإذا كان موجبا كان C فوق Δ وإذا كان سالبا كان C تحت Δ

♣ دراسة وجود المقاربات الشاقولية والأفقية تكون بإيجاد النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف.

[27] أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$، ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

الحل:

....

....

....

....

....

....

[28] أعد حل السؤال السابق للتابع $f(x)=\dfrac{3x}{1-x}$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

مثال15: ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.

(1) أوجد معادلة المقارب الشاقولي أو الافقي لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقاربه.

(2) أثبت أن $\Delta : y = x+1$ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

(3) ادرس وضع C_f بالنسبة إلى Δ .

الحل: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x+2} = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x+2} = -\infty$ لا يوجد مقارب.

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

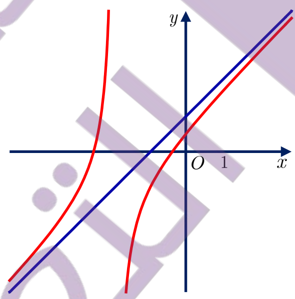
$x=-2$ مقارب شاقولي و C يقع على يمين المقارب.

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

$x=-2$ مقارب شاقولي و C يقع على يسار المقارب.

(2) نجد الفرق

$$f(x)-y_\Delta = f(x)-(x+1) = \frac{x^2+3x+1-(x^2+3x+2)}{x+2} = \frac{-1}{x+2}$$



$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x+2} = 0$

Δ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

(3) $f(x)-(x+1) = \dfrac{-1}{x+2}$

أن الإشارة من اشارة $x+2$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$\frac{-1}{x+2}$	$+$	||	$-$
C	فوق Δ	||	تحت Δ

[29] فيما يأتي بين معللا إجابتك إذا كان المستقيم Δ مقاربا مائلا للخط البياني C_f للتابع f ، عند $+\infty$ أو عند $-\infty$. ادرس بعدئذ الوضع النسبي للخط C_f و مقاربه Δ .

ⓐ $\Delta : y = -x+1$ $\quad f(x) = -x+1-\dfrac{1}{x^2}$

ⓑ $\Delta : y = 3x+7$ $\quad f(x) = 3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$

ⓒ $\Delta : y = 2x+3$ $\quad f(x) = 2x+3+\dfrac{10}{x+1}$

ⓓ $\Delta : y = 2x+1$ $\quad f(x) = \dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$

ⓔ $\Delta : y = \dfrac{1}{2}x+1$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}$

ⓕ $\Delta : y = x$ $\quad f(x) = x+\dfrac{\sin x}{x}$

الحل:

سما المجد التعليمية

[30] (دورة 1 – 2019) ليكن $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x^2}$

أثبت أن $\Delta : y = x + 3$ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

ثم ادرس وضع C_f بالنسبة إلى Δ.

الحل:

[31] (دورة 1 – 2022) ليكن $f(x) = x + 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

أثبت أن $\Delta : y = x + 1$ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

الحل:

[32] f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق: $f(x) = \frac{x^3 + \cos x + 2}{x^2}$

أثبت أنَّ المستقيم $d : y = x$ مقاربٌ مائل للخط عند $+\infty$.

وادرس الوضع النسبي.

الحل:

[33] (دورة 2 – 2021) f المعرف على $]-\infty, 0[$ وفق: $f(x) = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x}$ أثبت أنَّ المستقيم $d : y = 2x$ مقاربٌ مائل للخط عند $-\infty$. وادرس الوضع النسبي.

الحل:

5. إيجاد المقارب المائل:

♣ إذا كان التابع يحوي حدين أحدهما من الدرجة الأولى والأخر نهايته صفر عند $\pm\infty$ نخمن أن مقدار الدرجة الأولى مقارب مائل عند $\pm\infty$ ونثبت ذلك بإثبات $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$.

♣ إذا كان التابع كسري نقسم قسمة اقليدية فنعود إلى الحالة السابقة.

♣ اذا كان $\sqrt{ax^2+bx+c}$ نتمم الحشوة الى مربع كامل ونحذف الحد الثابت فنحصل على المقارب المائل ونثبت ذلك.

♣ التعريف (الطريقة العامة) إذا تحقق الشرطان

$$\boxed{\text{①}\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty \qquad \text{②}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*}$$

يوجد مقارب مائل عند $+\infty$ من الشكل $y=ax+b$ ونوجد b من العلاقة $\boxed{b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax}$ (وكذلك عند $-\infty$)

مثال 16: ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.

أوجد معادلة المقارب المائل للخط C_f في جوار $+\infty$.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x+2}=+\infty$$

و $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x^2+2x}=1$$

يوجد مقارب مائل عند $+\infty$ من الشكل $y=ax+b$ ونوجد b

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x+2}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1-(x^2+2x)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2}=1$$

المقارب هو $y=x+1$.

مثال 17: ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.

أوجد معادلة المقارب المائل للخط C_f في جوار $-\infty$.

الحل:

نلاحظ أن التابع كسري لذلك يمكن أن نقسم قسمة اقليدية.

$$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+2}=x+1+\frac{-1}{x+2}$$

أن $\Delta: y=x+1$ مقارب في جوار $-\infty$. نثبت ذلك

$$f(x)-y_\Delta=f(x)-(x+1)$$

$$=\frac{x^2+3x+1-(x^2+3x+2)}{x+2}=\frac{-1}{x+2}$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+2}=0$.

ومنه Δ مقارب للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

[34] f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه $\mathcal{D}_f$. بين، إن كان ثمة مستقيمات مقاربة مائلة للخط $\mathcal{C}$.

ⓐ $f(x)=1-x+\dfrac{3x}{x^2+2}$ ⓑ $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$

ⓒ $f(x)=\sqrt{x^2-4x+9}$ ⓓ $f(x)=\dfrac{x^2-3\sqrt{x}+1}{x-1}$

الحل:

[35] (دورة $2020-1$) f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

ⓐ ادرس نهاية f عند $-\infty$. اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

ⓑ أثبت أن $\Delta: y=2x$ مقاربٌ للخط C في جوار $+\infty$.

ⓒ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

الحل:

المجد التعليمية

[36] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

ⓐ أثبت أن $\Delta : y = x+1$ مقاربٌ للخط C في جوار $+\infty$.

ⓑ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C .

ⓒ أصحيحٌ أن $\Delta' : y = x-1$ مقاربٌ للخط C في جوار $-\infty$ ؟

الحل:

[37] f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}$.

ⓐ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)$.

ⓑ استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C للتابع f في جوار $+\infty$. ادرس الوضع النسبي.

ⓒ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. وأثبت وجود عدد a يحقق $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = a$

ⓓ استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط C للتابع f في جوار $-\infty$.

الحل:

[38] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$.

ⓐ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ⓑ اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية.

ⓒ استنتج وجود مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار $+\infty$.

الحل:

[39] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$.

ⓐ ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

ⓑ اكتب $4x^2-4x+3$ بالشكل القانوني.

ⓒ ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$ عند $+\infty$. واستنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما. وادرس الوضع النسبي.

الحل:

[40] f معرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\left|x^2-1\right|}$.

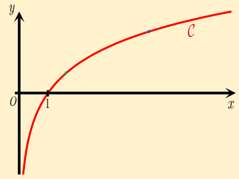
1. ادرس نهاية f عند $+\infty$. وهل يوجد مقارب افقي.
2. جد $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)$ واستنتج أنَّ الخط C مقارب مائل.
3. ادرس الوضع النسبي للخط C .

الحل:

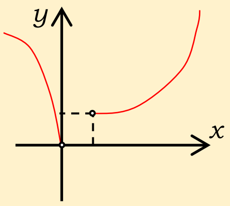
سما المجد التعليمية

الاستمرار

1. الاستمرار بيانيا:



نلاحظ أن الخط البياني مستمر لأنه يتألف من قطعة وحدة



نلاحظ أن التابع غير مستمر لأن خطه البياني لا يتألف من قطعة واحدة.

ملاحظة: إذا كان العدد لا ينتمي لمجموعة التعريف فالتابع غير مستمر عند هذا العدد.

2. الاستمرار عند عدد:

يكون f مستمر عند a إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$

أو $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} f(x) = f(a)$

مثال18: ليكن f التابع المعرف وفق: $f(x) = \sqrt{x}$

هل f مستمرا عند 0 ؟

الحل: f مستمرا عند 0 لأن

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \sqrt{0} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

مثال19: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & : \ x \neq 0 \\ 2 & : \ x = 0 \end{cases}$$

هل f مستمرا عند 0 ؟

الحل:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 2\dfrac{\sin 2x}{2x} = 2 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$$

أي f مستمرا عند 0.

[1] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x} & : \ x \neq 0 \\ 2 & : \ x = 0 \end{cases}$ هل f مستمرا عند 0 ؟

[41] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : \ x \neq 0 \\ m & : \ x = 0 \end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمرا على $\mathbb{R}$؟

الحل:

سما المجد التعليمية

[42] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \quad x\neq 0 \\ 0 & : \quad x=0 \end{cases}$$

ⓐ احسب نهاية f عند الصفر.

ⓑ هل f مستمر عند الصفر؟

الحل:

[43] (دورة $2-2019$) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & : \quad x\neq 0 \\ m & : \quad x=0 \end{cases}$$

ⓐ احسب نهاية $x\mapsto \dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ عند الصفر.

ⓑ ما قيمة m التي تجعل f مستمرا على $\mathbb{R}$؟

الحل:

3. مجال الاستمرار:

مجال الاستمرار هو نفس مجال التعريف الا في حالة أكثر من فرع نحذف نقطة الفصل وندرس استمرارها إذا كان مستمر نعيدها.

مثال20: عين مجال الاستمرار في كل مما يأتي:

(1) $f(x)=\sqrt{x-2}$

الحل: $D=[2,+\infty[$ أي f مستمرا على $[2,+\infty[$

(2) f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} & : \quad x>1 \\ 0 & : \quad x=1 \end{cases}$

الحل: f مستمر على $]1,+\infty[$ ندرس الاستمرار عند 1

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ \lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x-1}=0 \end{array}\right\} \lim_{x\to1} f(x)=f(1)=0$$

أي f مستمرا عند 1 ومنه f مستمرا على $[1,+\infty[$.

[44] عين مجال الاستمرار مع التعليل في كل مما يأتي:

ⓐ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

ⓑ $f(x)=f(x)=\cos x$

ⓒ $f(x)=\sqrt{x+1}$

ⓓ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$

4. تعليل مجال الاستمرار:

♣ هنا نستعمل القاعدة: جميع التوابع التي نحصل عليها من عمليات جبرية أو عمليات تركيب على توابع (كثير الحدود أو كسري أو مرجعي)، هي توابع مستمرة على مجموعات تعريفها.

طريقة التعليل(مبرهنة):

♣ مجال استمرار التابع كثير الحدود والتابع الكسري والتابع المرجعي هو مجال التعريف.

♣ ان مجموع او طرح او ضرب او قسمة تابعين مستمرين هو تابع مستمر مجاله.

♣ في التابع المركب: نكتب لأنه مركب تابعين مستمرين حيث:

– حشوة التابع مستمر على مجال الدراسة.

– التابع المرجعي مستمر على مجاله.

مثال21: عين مجال الاستمرار في كل مما يأتي:

(1) $f(x)=x^3-2x+1$

الحل: $D=\mathbb{R}$ أي f مستمرا على $\mathbb{R}$ لأنه تابع كثير حدود.

(2) $f(x)=\sqrt{x}$

الحل: $D=[0,+\infty[$ أي f مستمرا على $[0,+\infty[$ لأنه تابع مرجعي.

(3) $f(x)=x^3+\sin x$ و $D=\mathbb{R}$

الحل: f مستمر على $\mathbb{R}$ لأنه مجموع تابعين مستمرين حيث:

$x\mapsto x^3$ مستمرا على $\mathbb{R}$ لأنه تابع مرجعي.

$x\mapsto \sin x$ مستمرا على $\mathbb{R}$ لأنه تابع مرجعي.

(4) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ لأنه مركب تابعين مستمرين حيث:

الحل: $D=\mathbb{R}^*$ أي f مستمرا على $\mathbb{R}^*$ لأن

$x\mapsto \dfrac{1}{x}$ مستمرا على $\mathbb{R}^*$ لأنه تابع مرجعي.

$x\mapsto \sin x$ مستمرا على $\mathbb{R}$ لأنه تابع مرجعي.

♣ يمكن الاعتماد على ان التابع اشتقاقي على مجال لنثبت أنه مستمر على هذا المجال لان كل تابع اشتقاقي هو مستمر والعكس غير صحيح بالضرورة.

[45] عين مجال الاستمرار مع التعليل في كل مما يأتي:

ⓐ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ ⓑ $f(x)=f(x)=x^3+\cos x$

ⓒ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ⓓ $f(x)=\sin\dfrac{x+1}{x+2}$

5. تابع الجزء الصحيح:

♣ هو تابع يستبدل العدد الحقيقي بعدد صحيح يقع تحته (على يساره) $x\mapsto E(x)=n$ حيث n يحقق $n\le x<n+1$.

♣ **حسابه:** نستبدله باليسار الصحيح:

مثال22: $E(3.7)=3$ و $E(\pi)=3$ و $E(-3.7)=-4$ و $E(-3)=-3$. $E(0)=0$

♣ **نهايته في حالة وجود** $E(\pm\infty)$: نستعمل مبرهنة الإحاطة وفق

$$\boxed{x-1<E(x)\le x}$$

مثال23: جد نهاية التابع $f:x\mapsto\dfrac{E(x)-1}{x}$ عند $+\infty$.

الحل:

لدينا $x-1<E(x)\le x$

نطرح 1: $x-2<E(x)-1\le x-1$

نقسم على $x>0$: $\dfrac{x-2}{x}<\dfrac{E(x)-1}{x}\le\dfrac{x-1}{x}$

وحسب الإحاطة نجد $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1$

. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

[2] ادرس نهاية التابع $f:x\mapsto\dfrac{1-E(x)}{x^2+1}$ عند $-\infty$.

الحل:

[3] ادرس نهاية التابع $f : x \mapsto \dfrac{E(x)}{x}$ عند $+\infty$.

الحل:

♣ **نهايته عند عدد صحيح:** نوجد نهاية اليمين واليسار والصورة:

[4] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2x - E(x)$.

احسب نهاية f عند 1.

الحل:

♣ **كتابة $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$:** نجزئ مجال التعريف إلى مجالات صحيحة.

♣ **رسمه:** نرسم كل فرع على حدى بتصوير طرفيه.

[5] ليكن f التابع المعرف على $[0,3[$ وفق $f(x) = 1 + E(x)$.

ⓐ اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$.

ⓑ ارسم الخط للتابع f على $[0,3[$. هل f مستمر .

الحل:

[6] ليكن f التابع المعرف على $[0,2]$ وفق $f(x) = x - E(x)$.

ⓐ ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$.

ⓑ هل f مستمر على المجال $[0,2]$؟

الحل:

سما المعد التعليمية

[7] ليكن f المعرف على $[0,2]$ وفق $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$.

ⓐ اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$).

ⓑ أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$؟

الحل:

تمارين عامة محلولة

[46] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$.

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$. واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$.

واستنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2.

③ ادرس الوضع النسبي للخط C وكل من المقاربين Δ_1 و Δ_2.

الحل: ① عند $+\infty$ لدينا $4x^2-1>0$ ومن ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

لدينا أيضا عند $-\infty$ و $\sqrt{x^2}=-x$ من ثم

$f(x)=x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

② لدينا $f(x)-3x=\sqrt{4x^2-1}-2x=\dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$$

فالمستقيم $\Delta_1: y=3x$ مقارب للخط C للتابع f في جوار $+\infty$.

لدينا $f(x)+x=\sqrt{4x^2-1}+2x=\dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$$

فالمستقيم $\Delta_2: y=-x$ مقارب للخط C للتابع f في جوار $-\infty$.

③ $f(x)-y_{\Delta_1}=f(x)-3x=\sqrt{|4x^2-1|}-2x$.

في حالة $x<0$ يكون C فوق Δ وفي حالة $x>0$ نجعل

أي $f(x)-3x=0$ $\quad\sqrt{|4x^2-1|}=2x$

أي $|4x^2-1|=4x^2$ أي $8x^2=1$. أي $x=\frac{1}{2\sqrt2}$

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad \frac{1}{2\sqrt2}$	$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta_1}$	$+\quad 0$	$-$
C	فوق Δ_1	تحت Δ_1

● $f(x)-y_{\Delta_2}=f(x)+x=\sqrt{|4x^2-1|}+2x$. في حالة

$x>0$ يكون C فوق Δ وفي حالة $x<0$ نجعل

$f(x)+x=0$ وهذا يكافئ $\sqrt{|4x^2-1|}=-2x$

أي $|4x^2-1|=4x^2$ أي $8x^2=1$. وهذا ينعدم عند $x=-\frac{1}{2\sqrt2}$:

x	$-\infty \quad \frac{-1}{2\sqrt2}$	$0 \quad +\infty$
$f(x)-y_{\Delta_2}$	$-\quad 0$	$+$
C	تحت Δ_2	فوق Δ_2

[47] ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$.

① أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt2\,x\right)=\frac{\sqrt2}{4}$.

② استنتج قيمة $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\sqrt2\,x+\frac{\sqrt2}{4})\right)$.

الحل: بالإتمام إلى مربع كامل

$$f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}=\sqrt{2(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}$$

$$=\sqrt{2(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{2})}=\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}-\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}-\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}+\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)}{\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}+\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}-2(x+\frac{1}{4})^2}{\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}+\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8}{16}}{\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}+\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)}=0$$

أي $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)=0$

Δ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

بالمثل نجد أن المستقيم $y=-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}$ مقارب في جوار $-\infty$.

[48] من المعلوم أن كثير حدود P من الدرجة n يكتب بالصيغة $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ حيث $a_n\neq 0$.

أثبت أنه إذا كان n عددا فرديا، قبل P جذرا حقيقيا على الأقل.

الحل: لنفترض $a_n>0$. ومنه

$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n=-\infty$ فيوجد عدد a يحقق $p(a)<0$.

و $\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}a_nx^n=+\infty$ فيوجد b أكبر تماما من a يحقق $P(b)>0$.

ولدينا P مستمرا على $[a,b]$ ويحقق $P(a)P(b)<0$ فللمعادلة $P(x)=0$ حل وحيد c على الأقل ينتمي إلى المجال $[a,b]$.

لنفترض $a_n<0$. ومنه $\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}a_nx^n=-\infty$ فيوجد عدد حقيقي a يحقق $p(a)<0$.

و $\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n=+\infty$ فيوجد b أكبر تماما من a يحقق $P(b)>0$.

ولدينا P مستمرا على $[a,b]$ ويحقق $P(a)P(b)<0$ فللمعادلة $P(x)=0$ حل وحيد c على الأقل ينتمي إلى المجال $[a,b]$.

[49] ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$.

① عين $\mathcal{D}_f$ مجموعة تعريف f. ثم أوجد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$.

② ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف $\mathcal{D}_f$.

الحل: ① لدينا $\Delta_f=\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$ و $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ وبالقسمة الاقليدية نجد $f(x)=3+\frac{9x+6}{x^2-x-2}$

بالمقارنة مع $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ نجد $a=3$.

و $\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}=\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ نضرب بـ $(x+1)(x-2)$

$$9x+6=b(x-2)+c(x+1)$$

بافتراض $x=2$ نجد $24=3c$ أي $8=c$

بافتراض $x=-1$ نجد $-3=-3b$ أي $b=1$

②

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=3$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$

[50] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

① أثبت أن f متزايد تماما على المجال $[-\frac{3}{2},-1[$. ثم نظم جدولا بتغيرات f على المجال $[-\frac{3}{2},-1[$.

② أثبت أن للمعادلة $f(x)=10$ حلا وحيدا في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

الحل: ① $f'(x)=\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ ومنه $f'(x)>0$ على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$ فالتابع f متزايد تماما.

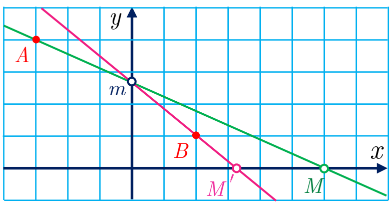
$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}f(x)=\frac{27}{4}$ و $\lim_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$

x	$-\frac{3}{2}$		-1
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

② التابع f مستمر ومتزايد تماما على $[-\frac{3}{2},-1[$. $10\in f\left([-\frac{3}{2},-1[\right)=[\frac{27}{4},+\infty[$. ومنه أن للمعادلة $f(x)=10$ حلا وحيدا في المجال $[-\frac{3}{2},-1[$.

[51] النقطتان الثابتتان $A(-3,4)$ و $B(2,1)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$. نقرن بالنقطة M النقطة M' التي نعرفها كما يلي:

- يقطع المستقيم (AM) المحور $(O;\vec{j})$ في m.



■ يقطع المستقيم (Bm) المحور $(O;\vec{i})$ في M'.

نرمز إلى فاصلة M' بالرمز $f(x)$.

① بدون حساب، خمن نهاية f عند $+\infty$.

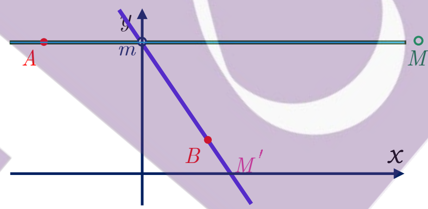
② أثبت أن $f(x)=\frac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$.

③ ادرس نهاية f عند $-\infty$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟ وادرس نهاية f عند $x=1$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

④ عندما $x=-3$، يكون المستقيم (AM) موازيا $(O,\vec{j})$ وتكون m « في اللانهاية ». يمكن أن نقول في هذه الحالة أن (Bm) يوازي $(O,\vec{j})$ وأن M' تقع في $(2,0)$. نعرف عندئذ التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، و $g(-3)=2$.

لماذا يكون g مستمرا عند -3؟

الحل: لدينا الرسم المجاور

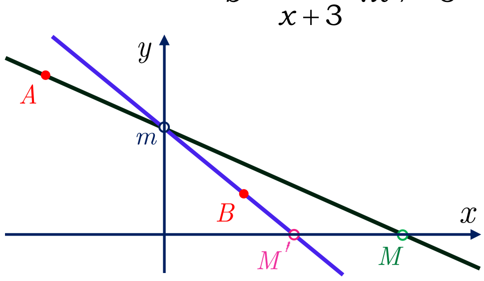


① $M(x,0)$ و $A(-3,4)$ فيكون ميل المستقيم (AM) هو $\frac{4}{x+3}$

وعندما تسعى x إلى $+\infty$ يصبح ميل المستقيم (AM) صفر أي موازي لمحور الفواصل وتكون احداثيا m هي $m(0,4)$ والمستقيم (mB) الذي معادلته $y=-\frac{3}{2}x+4$ يقطع محور الفواصل في النقطة $M'(\frac{8}{3},0)$. ومنه نخمن أن $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{8}{3}$،

② بافتراض $m(0,b)$ ولدينا الشعاعان $\overrightarrow{Am}(3,b-4)$ و $\overrightarrow{AM}(x+3,-4)$ مرتبطان خطيا ومنه $\frac{b-4}{-4}=\frac{3}{x+3}$

نحسب b نجد $x\neq -3$: $b=\frac{4x}{x+3}$.



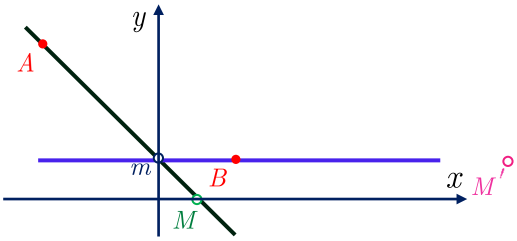
أي $m(0,\frac{4x}{x+3})$ ولدينا $M'(f(x),0)$ و $B(2,1)$

ويكون الشعاعان $\overrightarrow{Bm}(-2,\frac{3x-3}{x+3})$ و $\overrightarrow{BM'}(f(x)-2,-1)$ مرتبطان خطيا ومنه

$$\frac{f(x)-2}{-2}=\frac{\frac{3x-3}{x+3}}{-1}$$ ومنه $$f(x)=\frac{8x}{3x-3}: x\neq 1, x\neq -3$$

وهنا يكون $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{8}{3}$

③ a $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{8}{3}$ أي عندما x تسعى إلى $-\infty$ يصبح (AM) موازيا لمحور الفواصل وتكون النقطة $M'(\frac{8}{3},0)$.

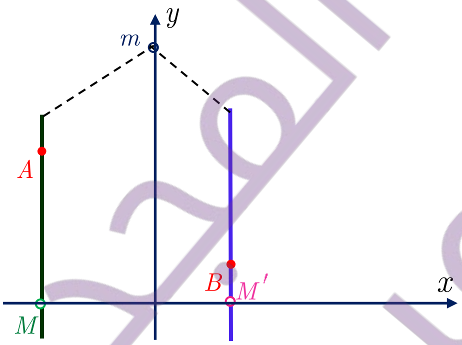


b $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$. عندما تسعى x إلى 1 يصبح المستقيم (mB) وكأنه قاطع لمحور الفواصل في اللانهاية الموجبة أو السالبة. أي يصبح (mB) موازيا لمحور الفواصل ولا يتقاطع معه فلا تتشكل النقطة M'

④ لدينا التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، و $g(-3)=2$.

$$g(x)=\begin{cases} f(x)=\frac{8x}{3(x-1)} & x\neq -3, x\neq 1 \\ 2 & x=-3 \end{cases}$$

وهو مستمر عند -3 لان $\lim_{x\to-3} g(x)=2=g(-3)=2$.



الاشتقاق

1. قواعد الاشتقاق:

$(ax)'=a$	$(a)'=0$
$(h\pm g)'=h'\pm g'$	$(x^n)'=nx^{n-1}$
$(h\times g)'=h'\times g+h\times g'$	$(a.h)'=a.h'$
$\left(\frac{h}{g}\right)'=\frac{h'.g-h.g'}{g^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

مثال1: جد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x)=x^3-2x+1$ بالاشتقاق نجد $f'(x)=3x^2-2$

(2) $f(x)=\frac{2x-1}{6x+3}$ ومنه $f'(x)=\frac{2\times 3-6\times(-1)}{(6x-3)^2}=\frac{12}{(6x-3)^2}$

[1] احسب $f'(x)$ لكل مما يأتي:

ⓐ $f(x)=-2x$ ⓑ $f(x)=x^4$ ⓒ $f(x)=x^3-x^2+7$

ⓓ $f(x)=5x^6$ ⓔ $f(x)=x^3(-x^2+7)$ ⓕ $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

الحل:

2. قواعد اشتقاق التوابع (مسكة مكنسة)

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[(x)^n]'=nx^{n-1}$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(e^x)'=e^x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$
$(\cot x)'=-(1+\cot^2 x)$	$(\tan x)'=(1+\tan^2 x)$

♣ عند اشتقاق إذا كانت الحشوة غير x نضرب بمشتق الحشوة.

مثال2: جد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x)=\sin x+\sin 5x$ ومنه $f'(x)=\cos x+5\cos 5x$

(2) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x^3+2}$ بالاشتقاق نجد

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3+2}}3x^2$$

[2] احسب $f'(x)$ لكل مما يأتي:

ⓐ $f(x)=\cos x+\cos 2x$ ⓑ $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x^3+2}$

ⓓ $f(x)=\sin x+\sin(x^2)$ ⓔ $f(x)=x^3+(x^5+6)^3$

الحل:

[3] ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

احسب $f'(x)$. ثم استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

ⓐ $g: x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ ⓑ $h: x \mapsto \dfrac{x^4+1}{x^2-1}$

ⓒ $\ell: x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ ⓓ $k: x \mapsto \dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

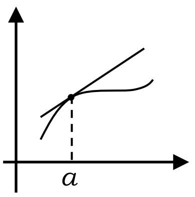
الحل:

[4] أوجد المشتق $f'(x)$ للتابع f .

ⓐ $f(x)=\sin^3 5x$ ⓑ $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 2x}$

الحل:

3. معادلة المماس:



ليكن T المماس للمنحني $\mathcal{C}$ في النقطة $A(a, f(a))$ عندئذ المعادلة:

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

معادلة للمماس T في النقطة $A(a, f(a))$.

مثال3: اكتب معادلة للمماس للخط C_f حيث $f(x)=\sqrt{x}+2$ في النقطة التي فاصلتها 1 .

الحل: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ومنه $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$ و $f(1)=3$

المعادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

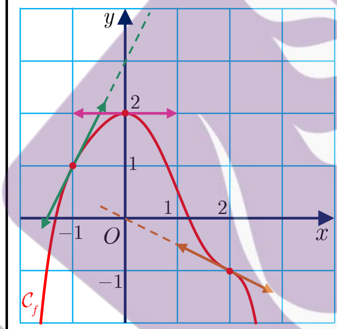
أي $y=\dfrac{1}{2}(x-1)+3$ ومنه $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

[5] C_f هو الخط البياني لتابع f . اكتب معادلة لمماس C_f في A من C_f التي فاصلتها 4 .

ⓐ $f(x)=x^2$ ⓑ $f(x)=\sqrt{2x+1}$

الحل:

[6] في الشكل المرافق، $\mathbb{C}_f$ هو الخط البياني لتابع f.



ⓐ عين $f(0)$ و $f(2)$ و $f(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(2)$ و $f'(-1)$.

ⓑ اكتب معادلة لمماس C_f في النقطة التي فاصلتها 2.

ⓒ جد تقريبا تآلفي للمقدار $f(2+h)$ ثم $f(2.1)$

ⓓ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$؟ أعط عددين صحيحين متتاليين يحصران كلا من حلول المعادلة $f(x)=0$.

♣ يمكن استعمال معادلة المماس $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ لإيجاد تقريب تآلفي لـ $f(a+h)$ حيث $f(x)\approx f'(a)(x-a)+f(a)$ أو $f(a+h)\approx f'(a)(h)+f(a)$.

الحل:

[1] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+1}$.

ⓐ اكتب معادلة لمماس $\mathbb{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتها 1.

ⓑ هل يقبل $\mathbb{C}$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$؟

ⓒ هل يقبل $\mathbb{C}$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$؟

ⓓ هل يقبل $\mathbb{C}$ مماسا يمر من مبدأ الاحداثيات؟

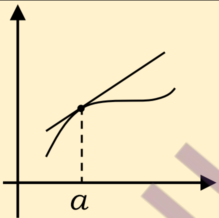
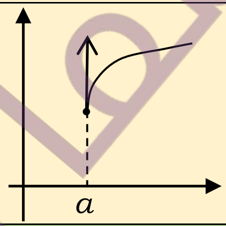
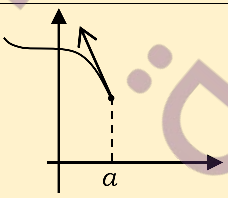
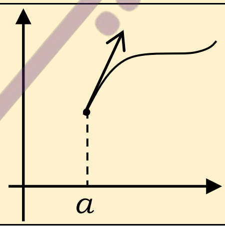
الحل:

4. تعريف العدد المشتق:

♣ نقول إن ℓ هو العدد المشتق للتابع f عند a إذا وفقط إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ حقيقية ℓ

♣ إذا كانت ناتج النهاية:

- عدد غير الصفر : f اشتقاقي عند a والمماس مائل عند a.
- 0 : f اشتقاقي عند a والمماس افقي عند a.
- $+\infty$ أو $-\infty$: f غير اشتقاقي عند a والمماس شاقولي.
- من اليمين عدد: f اشتقاقي من اليمين عند a ويوجد نصف مماس من اليمين.
- من اليسار عدد: f اشتقاقي من اليسار عند a ويوجد نصف مماس من اليسار.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$\underset{x\to a}{=\ell}$	$=-\infty$ $=+\infty$
الاشتقاقية	f اشتقاقي عند a.	f غير اشتقاقي عند a
المماس	مماس مائل عند a	مماس شاقولي عند a
ميل المماس	$f'(a)=\ell$	لا يوجد ميل
معادلة المماس	$y=f'(a)(x-a)+f(a)$	$x=a$
الرسم		
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$\underset{x\to a^-}{=\ell}$	$\underset{x\to a^+}{=\ell}$
الاشتقاقية	f اشتقاقي من اليسار عند a	f اشتقاقي من اليمين عند a
المماس	نصف مماس من اليسار	نصف مماس من اليمين
ميل المماس	$f'(a^-)=\ell$	$f'(a^+)=\ell$
معادلة المماس	$y=f'(a^-)(x-a)+f(a)$	$y=f'(a^+)(x-a)+f(a)$
الرسم		

مثال4: ليكن f المعرف وفق: $f(x)=\sqrt{x}$ هل f اشتقاقي عند 0 ؟

الحل: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

أي f غير اشتقاقي عند 0

مثال5: ليكن f المعرف وفق: $f(x)=x\sqrt{x}$ هل f اشتقاقي عند 0

الحل: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$

أي f اشتقاقي عند 0 .

[7] ادرس قابلية التابع f للاشتقاق عند الصفر. ما وضع المماس.

ⓐ $f(x)=x^2\sqrt{x}$ ⓑ $f(x)=\sqrt{x}$

ⓒ $f(x)=x|x|$ ⓓ $f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2+1}$

الحل:

سما المجد التعليمية

[8] التابع f معرفٌ على $\mathbb{R}$ وفق $f(0)=0$ و $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ في حالة $x\neq 0$.

ⓐ هل f اشتقاقي عند الصفر؟ علل إجابتك.

ⓑ احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الحل:

[9] التابع f معرفٌ على المجال $]0,1[$ وفق $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

ⓐ هل f اشتقاقي عند الصفر؟

ⓑ احسب $f'(x)$ على $]0,1[$.

الحل:

[10] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x+2}{|x|+1}$.

ⓐ ادرس قابلية اشتقاق f عند 0 من اليمين، ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لـ C في $A(0,2)$.

ⓑ ارسم نصف المماس السابق وارسم C_f على المجال $[0,2]$.

الحل:

سما المجد التعليمية

5. تعيين مجال الاشتقاق:

مجال الاشتقاق هو نفس مجال التعريف الا في حالتين:

♣ حالة الجذر والقيمة المطلقة: ندرس الاشتقاق عند الاعداد التي تعدم المضمون الجذر إذا كان اشتقاقي نتركها في المجال.

♣ حالة أكثر من فرع: ندرس الاشتقاق عند نقطة الفصل إذا كان اشتقاقي نتركها في المجال.

كل التوابع المرجعية اشتقاقية على مجموعة تعريفها إلا التابعين:

♣ التابع المرجعي $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$.

♣ التابع المرجعي $x \mapsto |x|$ اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

مثال 6: جد مجال الاشتقاق ثم جد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x)=x^4-5x^3+1$ نلاحظ $D=\mathbb{R}$ فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. بالاشتقاق نجد $f'(x)=4x^3-10x^2$.

(2) $f(x)=\cos x$ نلاحظ $D=\mathbb{R}$ فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. بالاشتقاق نجد $f'(x)=-\sin x$.

(3) $f(x)=x^2\sin x$ نلاحظ $D=\mathbb{R}$ و f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ بالاشتقاق نجد $f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

(4) $f(x)=\sqrt{x-1}$ نلاحظ $D=[1,+\infty[$ فيكون f اشتقاقي على $]1,+\infty[$ ندرس قابلية الاشتقاق عند 1:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty\notin\mathbb{R}$$

f غير اشتقاقي عند 1 ومنه f اشتقاقي على $]1,+\infty[$

بالاشتقاق نجد $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

(5) $f(x)=\cos\sqrt{x}$ نلاحظ $D=[0,+\infty[$ فيكون f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ندرس قابلية الاشتقاق عند 0:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}-\frac{2\sin^2(\sqrt{x}/2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\sqrt{x}/2)}{\sqrt{x}/2}\right)^2=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

f اشتقاقي عند 0 ومنه f اشتقاقي على $[0,+\infty[$

بالاشتقاق نجد $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$

(6) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\sqrt{x-1} & : \ x>1\\ (1-x)\sqrt{1-x} & : \ x\le 1\end{cases}$$

f مستمر عند 1 و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

ندرس الاشتقاق عند 1

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}(x-1)\sqrt{x-1}=0\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}-\frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x}=0\in\mathbb{R}$$

f اشتقاقي عند 1 ومنه f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

طريقة التعليل(مبرهنة):

♣ مجال اشتقاق التابع كثير الحدود والتابع الكسري والتابع المرجعي هو مجال التعريف.

♣ ان مجموع او طرح او ضرب او قسمة تابعين اشتقاقيين هو تابع اشتقاقي مجاله.

♣ التابع المركب: نكتب لأنه مركب تابعين اشتقاقي حيث:

– حشوة التابع اشتقاقي على مجال الدراسة.

– التابع المرجعي اشتقاقي على مجاله.

– مهما يكن x من مجال الدراسة فإن الحشوة مجال التابع المرجعي.

مثال 7: جد مجال الاشتقاق مع التعليل ثم جد $f'(x)$:

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x}$ نلاحظ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$

فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ لأنه f تابع كسري

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+x)-(x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2}=-\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}.$$

(2) $f(x)=\sin x$ نلاحظ $D=\mathbb{R}$ فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه f تابع مرجعي.

بالاشتقاق نجد $f'(x)=\cos x$.

(3) $f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ نلاحظ $D=\mathbb{R}$ فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه مركب تابعين اشتقاقي حيث:

$x\mapsto 2x+\dfrac{\pi}{3}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$x\mapsto +\sin x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 2x+\dfrac{\pi}{3}\in\mathbb{R}$

بالاشتقاق نجد $f'(x)=-\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\times 2=-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(4) $f(x)=x^2+\sin x$ نلاحظ $D=\mathbb{R}$

فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه مجموع تابعين اشتقاقي حيث:

$x\mapsto x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$x\mapsto \sin x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

بالاشتقاق نجد $f'(x) = 2x + \cos x$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ نلاحظ $D = \mathbb{R}$

فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه مركب تابعين اشتقاقي حيث:

$x \mapsto x^2 + 2x + 3$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 > 0$ حيث $(\Delta = -8 < 0)$ أي

$x^2 + 2x + 3 > 0$

بالاشتقاق $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}}(2x + 2) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

[11] جد مجال الاشتقاق مع التعليل.

ⓐ $f(x) = x^5 + x^2 + 1$ ⓑ $f(x) = \sin x$

ⓒ $f(x) = \sqrt{x}$ ⓓ $f(x) = x^5 + \sin x$

ⓔ $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$ ⓕ $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)^3$

ⓖ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ⓗ $f(x) = (\sin x)^4$

الحل:

[12] احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f.

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

الحل:

سما المجد التعليمية

6. إيجاد النهاية بالاستفادة من المشتق:

في حالة $\frac{0}{0}$ والمقام $x-a$ يمكن إيجاد النهاية بالاستفادة من المشتق وفق الخطوات:

- نفرض البسط (أو البسط بدون العدد) تابع جديد $h(x)$ ونشتقه.
- نكتب f اشتقاقي عند a لذلك $\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a)$.

مثال8: احسب النهاية $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$.

الحل: نفرض $h(x)=\sqrt{x^2+4}$ ومنه

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}2x\ ,\ h(0)=2,\ h'(0)=0$$

لدينا f اشتقاقي عند 0 ومنه $h'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$

أي $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

[13] احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

ⓐ $a=1$ $\quad f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

ⓑ $a=0$ $\quad f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$

ⓒ $a=1$ $\quad f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$

ⓓ $a=0$ $\quad f(x)=\frac{\tan x}{x}$

الحل:

[14] f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$.

ⓐ احسب $f'(x),\ f(1),\ f'(1)$ ⓑ استنتج $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-3}{x-1}$.

الحل:

سما المجد التعليمية

7. تأطير (حصر) توابع مثلثاتية:

خاصة: ليكن تابعين f و g معرفين واشتقاقيين على المجال $D=[0,+\infty[$. ويحققان $f'(x)\le g'(x)$ أيا يكن x من D . فإن
$$\boxed{f(x)-f(0)\le g(x)-g(0)}$$

الاثبات: بدراسة التابع h المعرف على D وفق $h(x)=f(x)-f(0)-g(x)+g(0)$ نلاحظ أنّ $h'(x)=f'(x)-g'(x)\le 0$ على $D=[0,+\infty[$ ، فالتابع h متناقص على D . ولكن $h(0)=0$ ، إذن $h(x)\le h(0)=0$ أياً كانت x من D .

مثال 9: أثبت أن $\sin x\le x$ ، أيا يكن $x\ge 0$.

الحل: $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x$ ومنه $f'(x)=\cos x$ و $g'(x)=1$ و $f'(x)=\cos x\le 1$ ومنه $\sin x\le x$ في حالة $x\ge 0$.

مثال 10: برهن أنه في حالة $x\in\mathbb{R}$ أن $1-\dfrac{x^2}{2}\le\cos x\le 1$

الحل: لدينا $\cos x\le 1$ ولنثبت $1-\dfrac{x^2}{2}\le\cos x$ باختيار $f(x)=\cos x$ ، و $g(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$ ومنه $f'(x)=-\sin x$ ، و $g'(x)=-x$ ولكن لدينا من السؤال السابق $\sin x\le x$ أي $-\sin x\ge -x$ أي $f'(x)\ge g'(x)$ ومنه $f(x)-f(0)\ge g(x)-g(0)$ أي $\cos x-1\ge 1-\dfrac{x^2}{2}-1$ أي $\cos x\ge 1-\dfrac{x^2}{2}$

ولكنّ طرفي هذه المتراجحة زوجيان، إذن تتحقّق المتراجحة على $\mathbb{R}$.

مثال 11: أثبت أن $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x\le x$ ، أيا يكن $x\ge 0$.

الحل: لدينا $\sin x\le x$ ولنثبت $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x$ باختيار $f(x)=x-\dfrac{x^3}{6}$ و $g(x)=\sin x$ ومنه $f'(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$ ، و $g'(x)=\cos x$ ولكن لدينا من السؤال السابق $1-\dfrac{x^2}{2}\le\cos x$ ومنه $g(x)-g(0)\le f(x)-f(0)$ أي $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x$ في حالة $x\ge 0$.

مثال 12: لدينا أن $1-\dfrac{x^2}{2}\le\cos x\le 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ ، أيا يكن $x\in\mathbb{R}$.

ⓐ بين أن $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x\le x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ ، أيا يكن $x\ge 0$.

ⓑ استنتج نهاية $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

الحل: ⓐ لدينا من السؤال السابق $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x$

ولنثبت $\sin x\le x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ باختيار $f(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ و $g(x)=\sin x$ ومنه $f'(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ ، و $g'(x)=\cos x$

ولكن لدينا $\cos x\le 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ ومنه $g(x)-g(0)\le f(x)-f(0)$ أي $\sin x\le x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ في حالة $x\ge 0$.

ⓑ في حالة $x>0$ نجد $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x\le x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$ أنّ

$$-\frac{x^3}{6}\le\sin x-x\le-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$
$$\frac{x^3}{6}\ge-\sin x+x\ge\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}$$
$$\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\le\frac{x-\sin x}{x^3}\le\frac{1}{6}$$

وبتطبيق هذه المتراجحة على $-x$ في حالة $x>0$ نستنتج أنها تبقى صحيحة في حالة $x<0$ أيضاً. إذن مهما تكن $x\ne 0$ فلدينا $\dfrac{1}{6}-\dfrac{x^2}{120}\le\dfrac{x-\sin x}{x^3}\le\dfrac{1}{6}$. وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة، نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أنّ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

دراسة التابع

1. دراسة تغيرات التابع:

مبرهنة الاطراد:

ليكن f تابعا اشتقاقيا على مجال I، والمشتق f'.

♣ إذا كان $f' \geq 0$ على I (حيث ينعدم عند عدد منته من النقاط) كان f متزايد تماما على I.

♣ إذا كان $f' \leq 0$ على I (حيث ينعدم عند عدد منته من النقاط) كان f متناقص تماما على I.

♣ إذا كان f' معدوما على I كان f ثابتا على I.

خطوات دراسة تغيرات التابع:

♣ نوجد النهايات عند اطراف مجموعة التعريف المفتوحة والقيم عند الأطراف المغلقة.

♣ نوجد $f'(x)$ ونجعل $f'(x)=0$ ونوجد قيم x و $f(x)$ المقابلة.

♣ ننظم جدول بالمعلومات السابقة عند الضرورة.

رسم منحنى التابع:

في حال عدم وجود جدول تغيرات نختار نقاط مساعدة ونصل بينها وفي وجود جدول تغيرات نتبع:

♣ نرسم المقاربات والمماسات في حال وجودها (المستقيم الذي x و y)

♣ نعين النقاط الناتجة من الجدول وأي نقط معلومة أخرى.

♣ عند الحاجة نعين نقط التقاطع مع ox , oy .

التقاطع مع المحاور

التقاطع مع Oy يكون $x=0$ (دائما يمكن الإيجاد)

التقاطع مع المحور Ox يكون $f(x)=0$ (أحيانا يمكن الإيجاد)

مثال13: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x+5$. ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

الحل: f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ولدينا $f'(x)=3(x^2-1)$ نجعل $f'(x)=0$ ومنه $3(x^2-1)=0$ أي $x=\pm1$ ومنه $f(1)=3,\ f(-1)=7$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

مثال14: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$.

ⓐ أثبت أنّ f مستمر على $\mathbb{R}$

ⓑ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها وعيّن $f(\mathbb{R})$.

الحل: ⓐ التابع مستمر على $\mathbb{R}$ لأنّ $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+1}$ تابع كسري مستمر على $\mathbb{R}$. و $x\mapsto1$ مستمر على $\mathbb{R}$.

ⓑ f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

ولدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ نجعل $f'(x)=0$ ومنه $2x=0$ أي $x=0$ ومنه $f(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	1

إذن $f(\mathbb{R})=[0,1[$.

مثال15: التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

ⓐ تحقق أنَّ f تابعٌ زوجي.

ⓑ علّل كون $\Delta: y=x$ مقارباً مائلاً للخط C في جوار $+\infty$؟

ⓒ ادرس تغيرات f. ونظِّم جدولاً بها

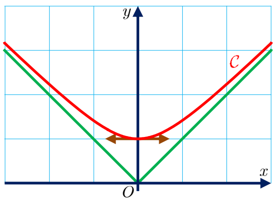
الحل: ⓐ الشرط ① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$ (محقّق)

الشرط ② $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$.

ومنه f تابعٌ زوجي.

ⓑ $f(x)-y_{\Delta}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y_{\Delta}=0$

إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط البياني C.



ⓒ f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ولدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

نجعل $f'(x)=0$ ومنه $x=0$ ومنه $f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

[15] ادرس تغيرات f وفق: $f(x)=x^2-2x-3$. ثم ارسم C.

الحل:

[16] ادرس تغيرات f وفق: $f(x) = x^3 - 3x + 1$. ثم ارسم C .

الحل:

[17] ادرس تغيرات f وفق: $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$. ثم ارسم C .

الحل:

[18] التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8}$

ⓐ احسب نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل C مقاربا أفقيا؟

ⓑ تحقق أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C .

ⓒ نظم جدولا بتغيرات f . وارسم مقاربات C ثم ارسم C .

الحل:

سما المجد التعليمية

[19] ليكن التابع $f(x)=x\sqrt{x(2-x)}$ المعرف على $[0,2]$.

ⓐ عين مجال الاشتقاق

ⓑ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

ⓒ عين مماسي C في النقطتين $A(0,0)$ و $B(2,0)$.

ⓓ ارسم مماسي C في A و B ثم ارسم C.

الحل:

المجد التعليمية

1.تعيين القيم الحدية:

تعريف نقول إن القيمة $f(c)$ **قيمة كبرى محليا** للتابع f يبلغها عند النقطة c إذا وجد مجالٌ مفتوحٌ J يضم النقطة c ويحقق الشرط

$$\forall x \in J \cap D, \quad f(x) \leq f(c)$$

- نقول إن القيمة $f(c)$ **قيمة صغرى محليا** للتابع f يبلغها عند النقطة c إذا وجد مجالٌ مفتوحٌ J يضم النقطة c ويحقق الشرط

$$\forall x \in J \cap D, \quad f(x) \geq f(c)$$

- إذا كانت $f(c)$ قيمة كبرى (أو صغرى) محليا وكان f اشتقاقي عند c، و c محتواة في مجال مفتوح من D كان $f'(c) = 0$.
- إذا انعدم f' عند c وغير إشارته عندها، كانت $f(c)$ قيمة حدية (كبرى أو صغرى) محليا للتابع f .
- إذا كانت $f(c)$ قيمة حدية وكان f اشتقاقي عند c، كان المماس للخط البياني للتابع f عند c افقيا.

طريقة اثبات القيمة الحدية محلياً:

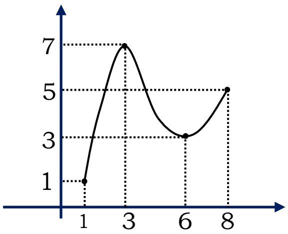
- نختر مجالٌ مفتوحٌ J يضم النقطة c ونوجد $J \cap D$
- نكتب من جدول التغيرات أو الرسم نجد

$\forall x \in J \cap D, \quad f(x) \geq f(c)$ (في حالة الصغرى محلياً)

$\forall x \in J \cap D, \quad f(x) \leq f(c)$ (في حالة الكبرى محلياً)

من الجدول: نكتب القيم من جدول التغيرات (حيث الشكل $\vee$ يعني قيمة صغرى محليا والشكل $\wedge$ يعني قيمة كبرى محليا وفي طرف مجال التعريف المغلق يوجد إما قيمة صغرى محليا أو كبرى محليا أما عند المجال المفتوح فلا يوجد قيم حدية)

مثال16: ليكن الخط البياني المرسوم جانباً للتابع f المعرف على $[1,8]$:



$f(6)=3$ قيمة صغرى محليا.

$f(8)=5$ قيمة كبرى محليا.

$f(3)=7$ قيمة كبرى محليا. وهي أكبر قيم التابع.

$f(1)=1$ قيمة صغرى محليا. وهي أصغر قيم التابع.

مثال17: ليكن التابع f المعرف على $[-1,5[$:

x	-1		0		1		5
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$
$f(x)$	-9	$\nearrow$	8	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6

$f(0)=8$ قيمة كبرى محليا. وهي أكبر قيم التابع.

$f(-1)=-9$ قيمة صغرى محليا وهي أصغر قيم التابع.

$f(1)=-2$ قيمة صغرى محليا.

عند 5 لا يوجد قيمة حدية.

مثال18: في الجدول السابق أثبت أن $f(0)$ قيمة كبرى محليا.

نختر المجال $J=]-1,1[$ ونوجد التقاطع

$J\cap D=]-1,1[\cap[-1,5[=]-1,1[$

نلاحظ من جدول التغيرات $f(x)\le f(0)=-1$ $\forall x\in]-1,1[,$ أي

$f(0)=-1$ قيمة كبرى محليا.

مثال19: في الجدول السابق أثبت أن $f(-1)$ قيمة صغرى محليا.

نختر المجال $J=]-2,0[$ ونوجد التقاطع

$J\cap D=]-2,0[\cap[-1,5[=[-1,0[$

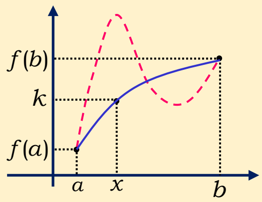
نلاحظ من جدول التغيرات $f(x)\ge f(-1)=-9$ $\forall x\in[-1,0[,$

أي $f(-1)=-9$ قيمة صغرى محليا.

2. حل المعادلة $f(x)=k$:

مبرهنة الحل الوحيد:

ليكن التابع f المعرف على $I=[a,b]$ تقبل المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا إذا كان



- ♣ f مستمر على I
- ♣ f مطرد تماما على I
- ♣ $k\in f([a,b])$

مبرهنة القيمة الوسطى:

ليكن f المعرف على $I=[a,b]$ تقبل $f(x)=k$ تقبل حلا على الأقل إذا كان

- ♣ f مستمر على I
- ♣ $k\in f([a,b])$

ملاحظة:

- ♣ المبرهنتين السابقتين صحيحتين إذا كان المجال مغلق أو مفتوح.
- ♣ إذا حدد عدد الحلول بالضبط نستعمل مبرهنة الحل الوحيد وإلا نستعمل مبرهنة القيمة الوسطى
- ♣ إذا كان التابع مطرد نوجد صورة مجال بإيجاد صورة طرفيه.
- ♣ في حالة $f(x)=0$ وكان f معرف عند طرفي المجال $[a,b]$: يمكن أن نستبدل الشرط $k\in f([a,b])$ بالشرط $f(a)\times f(b)<0$

[20] التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3+x-4$. هل للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $]1,2[$؟

الحل:

....

[21] التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+x-2$. هل للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $]1,2[$؟

الحل:

....

[22] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x^3-3x^2-1$

ⓐ ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ⓑ احسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثم نظم جدولا بتغيرات f.

ⓒ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل جذرا واحدا فقط.

الحل:

[23] ليكن f المعرف على $I=[-3,2]$ وفق $f(x)=x^2+1$.

ⓐ ارسم خطه البياني C_f. واحسب $f(I)$.

ⓑ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=4$ في المجال I؟

الحل:

[24] أوجد عدد حلول المعادلة.

ⓐ $x^5 - x^3 + x - 5 = 0$ ⓑ $x^4 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

الحل:

[25] ليكن f تابعا مستمرا واشتقاقيا على المجال $I = [0,1]$ ويحقق:

- أيا كان x من I كان $f(x)$ من I.
- وأيا كان x من $]0,1[$ كان $f'(x) < 1$.

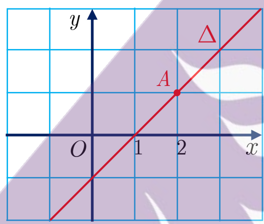
أثبت أن للمعادلة $f(x) = x$ حلا وحيدا في I.

الحل:

2.إيجاد الوسطاء :

القاعدة	المعلومة
$f(x_0)=y_0$	الخط C يمر من $A(x_0,y_0)$
$f'(x_0)=0$	المماس افقي عند x_0
$f'(x_0)=a$	المماس عند x_0 هو $y=ax+b$
$f(x_0)=y_0$, $f'(x_0)=0$ f' يغير اشارته عند x_0	y_0 قيمة حدية محليا عند x_0

[26] f المعرف على $[-2,4]$ وفق $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$. عين a و b علما بأن المستقيم Δ مماسّ للخط $\mathbb{C}$ في النقطة A .



الحل:

[27] f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=ax^3+bx^2+1$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل $\mathbb{C}$ مماسا أفقيا في $A(1,2)$ منه؟

الحل:

[28] f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$ عين a و b ليكون $y=4x+3$ مماس في النقطة التي فاصلتها 0.

الحل:

[29] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+ax$.
عين العدد a ليكون للتابع f قيمة حدية محليا عند $x=1$.

الحل:

[30] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$ ،
حيث a و b عددان حقيقيان. جد قيم a و b بحيث يتحقق الشرطان:

- $f(-1)$ قيمة حدية محليا للتابع.
- هذه القيمة الحدية محليا معدومة.

الحل:

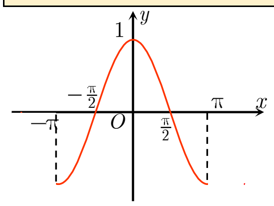
3.التابع الزوجي:

يكون التابع f **زوجي** إذا كان:

$$\boxed{①\ \forall x\in D\Rightarrow -x\in D\quad ②\ f(-x)=f(x)}$$

يكون C_f متناظر بالنسبة للمحور Oy

مثال: التابع $x\mapsto \cos x$ **تابع زوجي**



لأنه:

الشرط ① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$ (محقّق وضوحاً)

الشرط ② $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$.

ملاحظة: إذا كانت مجموعة تعريف التابع هي $\mathbb{R}$ ، كان شرط الأول محقّقاً وضوحاً.

[31] أثبت أن التابع f زوجي في كل من التوابع:

ⓐ $f(x)=x^2+\cos(2x)$ ⓑ $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$

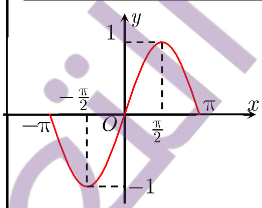
الحل:

4.التابع الفردي:

يكون التابع f **فردي** إذا كان:

$\boxed{① \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \quad ② f(x) = -f(-x)}$

ويكون C_f متناظر بالنسبة للمبدأ O.



مثال: التابع $x \mapsto \sin x$ فردي لأنه:

الشرط ① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$ (محقّق وضوحاً)

الشرط ②

$-f(-x) = -\sin(-x) = \sin(x) = f(x)$

ملاحظة: يمكن أن نكتفي بدراسة التابع الزوجي والفردي على الجزء الموجب من مجال التعريف.

[32] أثبت أن التابع f فردي في كل من التوابع:

ⓐ $f(x) = x\cos(x)$ ⓑ $f(x) = x^3 + \sin(2x)$

الحل:

5.التابع الدوري:

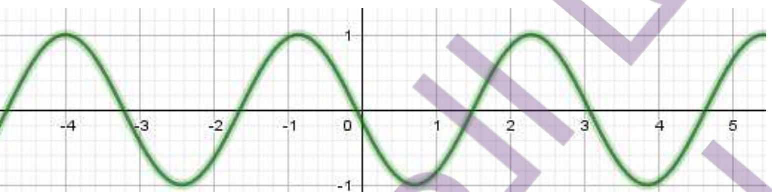
يكون التابع f **دوري** ودوره T إذا كان:

$\boxed{① \forall x \in D \Rightarrow x + T \in D \quad ② f(x+T) = f(x)}$

مثال: التابع $x \mapsto \sin(2x-3)$ تابع دوري ودوره π لأنه:

الشرط ① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $x+\pi$ من $\mathbb{R}$ (محقّق وضوحاً)

الشرط ② $f(x+\pi) = \sin(2x+2\pi-3) = \sin(2x-3) = f(x)$



ملاحظة: التابع $x \mapsto \sin(ax+b)$ و كذلك التابع $x \mapsto \cos(ax+b)$ دوري ودوره $\frac{2\pi}{|a|}$.

[33] أثبت أن التابع f دوري ودوره T في كل من التوابع:

ⓐ $f(x) = \cos(2x+3), T = \pi$ ⓑ $f(x) = \sin(x+2), T = 2\pi$

الحل:

6. دراسة تابع مثلثي

عندما يكون التابع دوري نكتفي بدراسته على مجال طوله دور واحد T فضل أن يكون من الشكل $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$.

مثال 20: f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2\sin x+\sin 2x$.

ⓐ تحقّق أنَّ f دوريٌّ وأنَّ 2π دورٌ له. ادرس الصفة الزوجية أو الفردية للتابع f. استنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

ⓑ أثبت أنّه، $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.

ⓒ ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$ ارسم الخط للتابع f على المجال $[0,\pi]$، ثمَّ على المجال $[-2\pi,2\pi]$.

الحل: ⓐ الشرط ① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $x+2\pi$ من $\mathbb{R}$ (محقق)

الشرط ②

$$f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)+\sin(2x+4\pi)=2\sin x+\sin 2x=f(x)$$

فالتابع f تابع دوري ودوره 2π. فتكفي بدراسته على $[-\pi,\pi]$.

الشرط ① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$ (محقّق وضوحاً)

الشرط ② $f(-x)=2\sin(-x)+\sin(-2x)=-2\sin x-\sin 2x=-f(x)$

ومنه f تابعٌ فردي. فتكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$.

ⓑ $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$
$=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

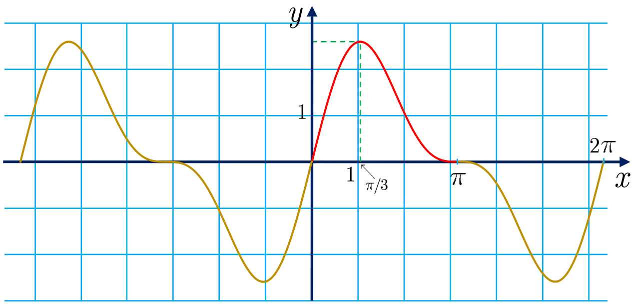
ⓒ f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

ولدينا $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$ نجعل $f'(x)=0$

ومنه $\cos x+1=0$ أي $\cos x=-1$ ومنه $x=\pi$ أو

$2\cos x-1=0$ أي $\cos x=\frac{1}{2}$ ومنه $x=\frac{\pi}{3}$ و $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0



[34] f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2\cos x+\cos 2x$.

ⓐ تحقّق أنَّ f دوريٌّ وأنَّ 2π دورٌ له. ادرس الصفة الزوجية للتابع f. استنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

ⓑ ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$.

ⓒ ارسم الخط للتابع f على $[0,\pi]$، ثمَّ على المجال $[-\pi,\pi]$.

الحل:

[35] نتأمل التابع f المعطى وفق $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$.

ⓐ ما مجموعة تعريف f ؟

ⓑ أيكون f مستمرا على مجموعة تعريفه؟

ⓒ بين أن التابع f زوجي ويقبل العدد 2π دورا له.

ⓓ ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$. أثبت أن g اشتقاقي وارسم خطه البياني.

ⓔ استنتج الخط للتابع f على $[-\pi,\pi]$. ما مجموعة تعريف f' ؟

الحل:

السما المجد التعليمية

[36] نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x-\cos x$.

ⓐ لماذا كل حل للمعادلة $f(x)=0$ يجب أن ينتمي إلى $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

ⓑ برهن أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يقع في $]0,\frac{1}{2}[$.

الحل:

سما المجد التعليمية

7. تأطير (حصر) توابع مثلثاتية:

خاصة: ليكن تابعين f و g معرفين واشتقاقيين على المجال $D=[0,+\infty[$. ويحققان $f'(x)\le g'(x)$ أيا يكن x من D. فإن $\boxed{f(x)-f(0)\le g(x)-g(0)}$

مثال 21: أثبت أن $\sin x\le x$، أيا يكن $x\ge 0$.

الحل: $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x$ ومنه $f'(x)=\cos x$

و $g'(x)=1$ و $f'(x)=\cos x\le 1$

ومنه $\sin x\le x$ في حالة $x\ge 0$.

مثال 22: برهن أنه في حالة $x\in\mathbb{R}$ أن

$$1-\frac{x^2}{2}\le \cos x\le 1$$

الحل: لدينا $\cos x\le 1$ ولنثبت $1-\frac{x^2}{2}\le \cos x$ باختيار

$f(x)=\cos x$، و $g(x)=1-\frac{x^2}{2}$ ومنه

$f'(x)=-\sin x$، و $g'(x)=-x$

ولكن لدينا من السؤال السابق $\sin x\le x$ أي $-\sin x\ge -x$

أي $f'(x)\ge g'(x)$ ومنه $f(x)-f(0)\ge g(x)-g(0)$ أي

$\cos x-1\ge 1-\frac{x^2}{2}-1$ أي $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$

ولكنّ طرفي هذه المتراجحة زوجيان، إذن تتحقّق المتراجحة على $\mathbb{R}$.

مثال 23: أثبت أن $x-\frac{x^3}{6}\le \sin x\le x$، أيا يكن $x\ge 0$.

الحل: لدينا $\sin x\le x$ ولنثبت $x-\frac{x^3}{6}\le \sin x$ باختيار

$f(x)=x-\frac{x^3}{6}$ و $g(x)=\sin x$ ومنه

$f'(x)=1-\frac{x^2}{2}$، و $g'(x)=\cos x$ ولكن لدينا من السؤال السابق

$1-\frac{x^2}{2}\le \cos x$ ومنه $g(x)-g(0)\le f(x)-f(0)$ أي

$x-\frac{x^3}{6}\le \sin x$ في حالة $x\ge 0$.

مثال 24: لدينا أن $1-\frac{x^2}{2}\le \cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$، أيا يكن $x\in\mathbb{R}$.

ⓐ بين أن $x-\frac{x^3}{6}\le \sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$، أيا يكن $x\ge 0$.

ⓑ استنتج نهاية $\frac{x-\sin x}{x^3}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

الحل: ⓐ لدينا من السؤال السابق $x-\frac{x^3}{6}\le \sin x$

ولنثبت $\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ باختيار $f(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

و $g(x)=\sin x$ ومنه $f'(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$، و $g'(x)=\cos x$

ولكن لدينا $\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ومنه

$g(x)-g(0)\le f(x)-f(0)$ أي $\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ في حالة $x\ge 0$.

ⓑ في حالة $x>0$ نجد $x-\frac{x^3}{6}\le \sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ أنّ

$$-\frac{x^3}{6}\le \sin x-x\le -\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

$$\frac{x^3}{6}\ge -\sin x+x\ge \frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\le \frac{x-\sin x}{x^3}\le \frac{1}{6}$$

وبتطبيق هذه المتراجحة على $-x$ في حالة $x>0$ نستنتج أنها تبقى صحيحة في حالة $x<0$ أيضاً. إذن مهما تكن $x\neq 0$ فلدينا

$\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\le \frac{x-\sin x}{x^3}\le \frac{1}{6}$. وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة،

نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أنّ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$.

تمارين على الاشتقاق

[37] f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x-1}-4$.

ⓐ ادرس تغيرات التابع f. أثبت أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

ⓑ احسب جبريا القيمة الحقيقية لذلك الجذر.

الحل:

[38] f المعرف على $I =]1,+\infty[$ وفق $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

ⓐ ادرس تغيرات f على I.

ⓑ استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرا وحيدا α يقع في $]1,2[$.

ⓒ احصر الحل في مجال طوله لا يتجاوز 0.5.

الحل:

[39] f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 7}{x+1}$

ⓐ أثبت أن d الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقاربٌ مائل للخط $\mathbb{C}$.

ⓑ ادرس نهاية f عند -1. ماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط $\mathbb{C}$؟

ⓒ ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها. ارسم مقاربات $\mathbb{C}$ ثم ارسم $\mathbb{C}$.

الحل:

المجد التعليمية

[40] f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها، ويحقق $f(0)=0$ و $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ عند كل x من $\mathbb{R}$.

ⓐ ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$. تحقق أن g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$.

ⓑ احسب $g(0)$ واستنتج أن التابع f فردي.

الحل:

سما المجد التعليمية

تمارين عامة محلولة

[41] f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x^3-3x^2-1$

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ واحسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثم نظم جدولا بتغيرات f.

② أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل جذرا واحدا فقط. وإذا رمزنا إلى هذا الجذر بالرمز α، أثبت أن α ينتمي إلى المجال $]1.6,1.7[$.

الحل: ① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$ ومنه

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

② من جدول التغيرات $0\notin f(]-\infty,0])=]-\infty,1[$

وأيضا $0\notin f(]0,1[)=]-2,1[$ فليس للمعادلة $f(x)=0$ حلول في $]-\infty,1[$.

أما على المجال $[1,+\infty[$ فالتابع مستمر ومتزايد تماما و $0\in f([1+\infty[)=[-2,+\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في $[1,+\infty[$. ومنه للمعادلة حل وحيد في $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1.6)=-0.488<0 \\ f(1.7)=0.156>0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(1.6)f(1.7)<0$$

ومنه $\alpha\in]1.6,1.7[$.

[42] C الخط للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$.

① أعط معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها 1.

② هل يقبل C مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=-\dfrac{1}{4}x$؟

③ هل يقبل C مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $4x-y=0$؟

الحل: ① معادلة المماس للخط C في النقطة التي تساوي فاصلتها هي

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

نوجد المشتق $f'(x)=\dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$. نعوض. $f(1)=\frac{1}{3}$ و $f'(1)=\frac{1}{9}$

ومنه معادلة المماس عند 1 هي $y=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}(x-1)$ أي $y=\frac{1}{9}(x+2)$.

② لدينا C مماس موازي للمستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}x$ بالتالي ميل المماس $-\frac{1}{4}$ ومنه $f'(x)=-\frac{1}{4}$ أي $x^4+12=0$ وهي معادلة مستحيلة الحل. وبالتالي لا يوجد مماس.

③ لدينا C مماس موازي للمستقيم الذي معادلته $y=4x$ بالتالي ميل المماس 4 ومنه $f'(x)=4$ أي $4x^4+17x^2+14=0$

وهي معادلة مستحيلة الحل $\Delta<0$. وبالتالي لا يوجد مماس.

[43] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

① تحقق أن $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$، أيا يكن x من $\mathbb{R}$.

② استنتج $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$، حيث x من $\mathbb{R}$.

الحل: ① $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ومنه

$$\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=\sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=x+\sqrt{1+x^2}=f(x)$$

② باشتقاق طرفي العلاقة $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$ نجد

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)+\sqrt{1+x^2}\,f''(x)=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}f(x)$$

بضرب الطرفين بالمقدار $\sqrt{1+x^2}$ نجد

$$x\cdot f'(x)+\left(1+x^2\right)f''(x)=f(x)$$

[44] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

① عين التابع المشتق f' للتابع f.

② g التابع المعرف على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x)=f(\sin x)$.

أثبت أن g اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$.

③ h التابع المعرف على $J=]1,+\infty[$ وفق $h(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$.

أثبت أن h اشتقاقي على J ثم احسب $h'(x)$ على J.

الحل: ① $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{-5}{(x-1)^2}$ على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

② $x\mapsto\sin x$ اشتقاقي على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ولا يأخذ القيمة 1 و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ إذن $x\mapsto g(x)=f(\sin x)$ اشتقاقي على I و $g'(x)=f'(\sin x)\cos x=\dfrac{-5\cos x}{(\sin x-1)^2}$.

③ $x\mapsto\sqrt{x}$ اشتقاقي على $J=]1,+\infty[$ ولا يأخذ القيمة 1 و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ إذن $x\mapsto h(x)=f(\sqrt{x})$ اشتقاقي على J و $h'(x)=f'(\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{-5}{2(\sqrt{x}-1)^2\sqrt{x}}$.

[45] أوجد عدد حلول المعادلة، ثم احسب قيمة تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

① $x^4-\dfrac{1}{2}x+1=0$ ② $\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}x^3+1=0$

الحل: ① التابع $x\mapsto f(x)=x^4-\dfrac{1}{2}x+1$ له جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات ليس للمعادلة $f(x)=0$ حلول في $\mathbb{R}$.

② $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1$ حيث $D=\mathbb{R}$ و f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5}x^5=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{5}x^5=-\infty$$

$f'(x)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$ نجعل $f'(x)=0$

أي $x^2(x^2-1)=0$ ومنه $x=0, x=1, x=-1$

و $f(-1)=\frac{17}{15}$, $f(1)=\frac{13}{15}$, $f(0)=0$,

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{15}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{13}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\infty,-1[$ وعلاوة على ذلك $f(-1)=\frac{17}{15}$ و $f(-2)=-\frac{41}{15}$. إذن $-2<\alpha<-1$. وبالتجريب نجد $f(-1.6)>0$ و $f(-1.7)<0$ نجد أن $-1.7<\alpha<-1.6$.

[46] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$.

① أثبت أن f متزايد تماما على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$. ثم نظم جدولا بتغيرات f على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

② أثبت أن للمعادلة $f(x)=10$ حلا وحيدا في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

الحل: ① $f'(x)=\dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ ومنه $f'(x)>0$ على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$ فالتابع f متزايد تماما.

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}} f(x)=\frac{27}{4} \text{ و } \lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$$

x	$-\dfrac{3}{2}$		-1
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$\dfrac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

② التابع f مستمر ومتزايد تماما على $]-\dfrac{3}{2},-1[$.

$10\in f\left(]-\dfrac{3}{2},-1[\right)=]\dfrac{27}{4},+\infty[$. ومنه أن للمعادلة $f(x)=10$ حلا وحيدا في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

[47] M هي النقطة التي إحداثياتها $(m,0)$ حيث $0\le m\le 3$، و N هي النقطة التي إحداثياتها $(0,n)$ حيث $n\ge 0$، النقطتان M و N تحققان $MN=3$. وأخيرا J هي نقطة من القطعة المستقيمة $[MN]$ تحقق $MJ=2$. نهدف إلى تعيين المحل الهندسي Λ للنقطة J عندما تتحول m في المجال $[0,3]$، ورسمه.

الحل: ① من تعريف J نجد $\overrightarrow{MJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$

أي $3\overrightarrow{MJ}=2\overrightarrow{MN}$ أو $3\overrightarrow{MO}+3\overrightarrow{OJ}=2\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{ON}$

ومنه $3\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$

② من $MN=3$ لدينا $m^2+n^2=9$

ولكن $n\ge 0$ وبالتالي $n=\sqrt{9-m^2}$.

نعوض في العلاقة الشعاعية السابقة

$$3\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$$

$$3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}$$

فيكون $3x=m$ و $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-m^2}$. أي

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{9-(3x)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{9-9x^2}=2\sqrt{1-x^2}$$

① من الفرض لدينا

$m\in[0,3]$

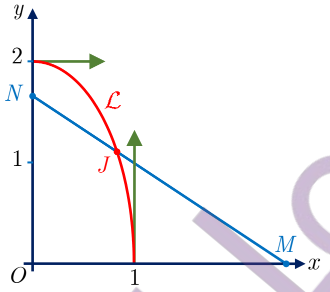
$3x\in[0,3]$

$x\in[0,1]$

② المحل الهندسي **L** هو للتابع **C** $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$ على $[0,1]$

③

x	0		1
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0



فالتابع f متناقص تماما على المجال $[0,1]$

دراسة قابلية اشتقاق f عند 1. في حالة $0<x<1$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(-2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=-\infty$$

f غير اشتقاقي عند 1 والخط للتابع f يقبل مماسا شاقوليا عند 1.

[48] E مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق $x^2-2x+4y^2=3$

أثبت أن المجموعة E هي اجتماع خطين بيانيين C_1 و C_2 لتابعين f_1 و f_2 ومن ثم رسم E.

الحل: $x^2-2x+4y^2=3$ تكافئ $y^2=\dfrac{1}{4}\left(3+2x-x^2\right)$.

ولكن $3+2x-x^2=(3-x)(1+x)$ لذلك قيم x التي تجعل $3+2x-x^2\ge 0$ هي $[-1,3]$.

ومنه تنتمي $M(x,y)$ إلى E إذا وفقط إذا كانت M من C_1 أو إلى C_2 حيث C_1 و C_2 هما الخطان للتابعين:

$f_1:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_1(x)=\frac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$ و

$f_2:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_2(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$

$x\mapsto 3+2x-x^2$ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $]-1,3[$

$x\mapsto\sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f_1'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}$$

قابلية الاشتقاق عند -1. في حالة $-1<x<3$ يكون $1+x>0$:

$$\lim_{x\to-1}\frac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}\right)=+\infty$$

فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند -1 ولكن f_1 مستمر عند -1 فلخطه C_1 مماس شاقولي عند -1.

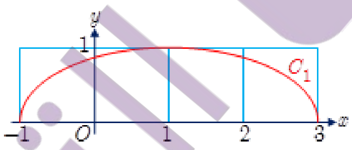
قابلية الاشتقاق عند 3 . هنا في حالة $-1<x<3$:

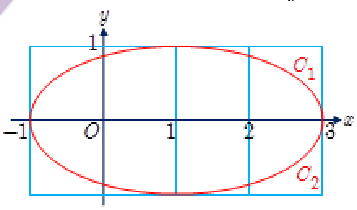
$$\lim_{x\to3}\frac{f_1(x)-f_1(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}\right)=-\infty$$

فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند 3 ولكن f_1 مستمر عند 3 فلخطه C_1 مماس شاقولي عند 3. وجدول التغيرات للتابع f_1.

x	-1		1		3
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

نلاحظ $f_2(x)=-f_1(x)$ الخط البياني C_2 هو صورة C_1 وفق التناظر المحوري بالنسبة إلى محور الفواصل ومنه نجد الرسم البياني للمجموعة E التي نسميها قطعا ناقصا.





[49] أثبت صحة المتراجحة $2\sin x+\tan x\ge 3x$ أيا يكن x من المجال $I=[0,\frac{\pi}{2}[$.

الحل: في حالة x من $I=[0,\frac{\pi}{2}[$ لدينا

$$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$$

المقام موجب فإشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $2\cos^3 x-3\cos^2 x+1$.

نفرض $2\cos^3 x-3\cos^2 x+1=P(x)$

نضع $t=\cos x\in]0,1]$ فيكون $P(t)=2t^3-3t^2+1$

ولدينا $P'(t)=6t(t-1)$ ومنه $P'(t)\le 0$ على المجال $]0,1]$

فالتابع $t\mapsto P(t)$ متناقص تماما على المجال $]0,1]$

ولكن $P(1)=0$ ومنه $P(t)\ge 0$ على $]0,1]$ ومنه $f'(x)\ge 0$ على I

فالتابع f تابع متزايد على I.

ولكن $f(0)=0$ إذن $f(x)\ge 0$ في حالة x من $I=[0,\frac{\pi}{2}[$.

[50] ليكن f تابعا مستمرا ومعرفا على المجال $I=[0,1]$ ويحقق $f(x)\in I$، أيا يكن x من I. نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على I وفق $k(x)=f(x)-x$. بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k، أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a)=a$.

الحل: التابع k تابع مستمر على المجال I

ولدينا من الفرض $f(x)\in[0,1]$ أي $f(0)\ge 0$ و $f(1)\le 1$ ومنه

$$\left.\begin{array}{l}k(0)=f(0)\ge 0\\ k(1)=f(1)-1\le 0\end{array}\right\}\Rightarrow 0\in[k(1),k(0)]$$

ومنه يوجد a من I يحقق $k(a)=0$ أي $f(a)=a$.

[51] ليكن m عددا حقيقيا، وليكن التابع f_m المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f_m(x)=x^3+mx^2-8x-m$$

① a أثبت أن الخطين البيانيين C_0 و C_1 يتقاطعان في نقطتين A و B. أوجد إحداثيات هاتين النقطتين.

b استنتج أن جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين A و B.

② أوجد نهاية f_m عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

③ استنتج مما سبق أن للمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثة حلول متمايزة في $\mathbb{R}$، أيا يكن العدد m

الحل: ① a (α,β) نقطة مشتركة بين C_0 و C_1 ومنه $f_0(\alpha)=\beta$ و $f_1(\alpha)=\beta$ أي $\alpha^3+\alpha^2-8\alpha-1=\beta,\quad \alpha^3-8\alpha=\beta$

بالطرح نجد $\alpha^2=1$ أي $\alpha=\pm1$ وبالتعويض نجد $\beta=\pm7$.

ومنه $(\alpha,\beta)=(1,-7)$ أو $(\alpha,\beta)=(-1,7)$

ومنه يتقاطع C_0 و C_1 في النقطتين $A(1,-7)$ و $B(-1,7)$.

b $f_m(1)=-7$ ومنه $A\in C_m$ و $f_m(-1)=7$ ومنه $B\in C_m$.

أي تمر جميع الخطوط البيانية C_m بالنقطتين A و B.

② $\lim_{x\to\infty}f_m(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f_m(x)=-\infty$

③ f_m كثير حدود من الدرجة الثالثة فللمعادلة $f_m(x)=0$ على الأكثر ثلاثة حلول. وهو مستمر على $\mathbb{R}$.

- لدينا $f_m(-1)=7$ و $\lim_{x\to-\infty}f_m(x)=-\infty$ فللمعادلة $f_m(x)=0$ حل x_1 ينتمي إلى $]-\infty,-1[$.
- لدينا $f_m(-1)=7$ و $f_m(1)=-7$ فللمعادلة $f_m(x)=0$ حل x_2 ينتمي إلى $]-1,1[$.
- لدينا $f_m(1)=-7$ و $\lim_{x\to\infty}f_m(x)=\infty$ فللمعادلة $f_m(x)=0$ حل x_3 ينتمي إلى $]1,+\infty[$.

فللمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$.

[52] f هو تابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها. نفترض أن:

▫ $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.

▫ f' متزايد على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقص على $]-\infty,0]$.

ارسم خطا بيانيا C يمكن أن يمثل التابع f.

الحل: التابع متزايد على $[0,+\infty[$ ومتناقص على $]-\infty,0]$

ويأخذ القيمة 1 عند الصفر. أي تابع من الشكل $x \mapsto x^2+1$.

ولكن f ينعدم عند الصفر. أي $f : x \mapsto x^3+x$.

[53] أوجد عدد حلول المعادلة، ثم احسب قيمة تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

① $x^4-\frac{1}{2}x+1=0$ ② $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1=0$

الحل: ① التابع $x \mapsto f(x)=x^4-\frac{1}{2}x+1$ له جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات ليس للمعادلة $f(x)=0$ حلول في $\mathbb{R}$.

② $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1$ حيث $D=\mathbb{R}$ و f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{5}x^5=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{5}x^5=-\infty$

$f'(x)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$ نجد $f'(x)=0$

أي $x^2(x^2-1)=0$ ومنه $x=0, x=1, x=-1$

و $f(-1)=\frac{17}{15},\quad f(1)=\frac{13}{15},\quad f(0)=0,$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{15}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{13}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\infty,-1[$ وعلاوة على ذلك $f(-1)=\frac{17}{15}$ و $f(-2)=-\frac{41}{15}$. إذن $-2<\alpha<-1$. وبالتجريب نجد $f(-1.6)>0$ و $f(-1.7)<0$ نجد أن $-1.7<\alpha<-1.6$.

[54] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

① ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني C.

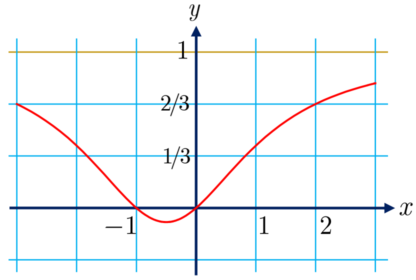
② عين المماسات للخط C المارة بالمبدأ، (غير المماس في المبدأ.)

③ ليكن a عددا حقيقيا. اكتب معادلة للمماس T_a الذي يمس C في النقطة $A(a,f(a))$. فكر في أن يكون T_a أحد المماسات المطلوبة عندما يمر بالمبدأ. ثم جد معادلة لكل مماس للخط يمر بالمبدأ.

الحل: ① $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ فالمستقيم $y=1$ مستقيم مقارب في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

$f(x)=1-\frac{3}{x^2+x+3}$ ومنه $f'(x)=\frac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{11}$	$\nearrow$	1



② معادلة T_a هي $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ أي

$$y=\frac{a^2+a}{a^2+a+3}+\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a)$$
$$=\frac{a^2+a}{a^2+a+3}+\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x-\frac{3(2a+1)a}{(a^2+a+3)^2}$$
$$=\frac{a^2(a^2+2a-2)}{(a^2+a+3)^2}+\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$$

③ يمر T_a من المبدأ إذا كانت النقطة $(0,0)$ تحقق معادلته أي $\frac{a^2(a^2+2a-2)}{(a^2+a+3)^2}=0$ أي $a^2(a^2+2a-2)=0$.

إما $a=0$ مرفوض لان المماس T_0 يمر في المبدأ.

أو $a=-1-\sqrt{3}$ أو $a=-1+\sqrt{3}$.

في حالة $a=-1+\sqrt{3}$

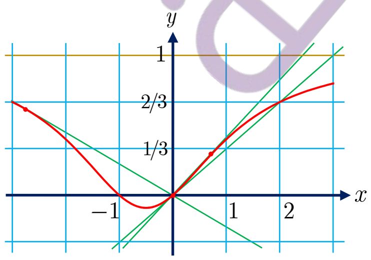
$$y=\frac{a^2(a^2+2a-2)}{(a^2+a+3)^2}+\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$$

ولكن المماس يمر من المبدأ

$$y=\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$$
$$y=\frac{3(2(\sqrt{3}-1)+1)}{((\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}-1)+3)^2}x$$
$$y=\frac{1+2\sqrt{3}}{11}x$$

وفي حالة $a=-1-\sqrt{3}$ يكون $y=\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$

$$y=\frac{3(2(-\sqrt{3}-1)+1)}{((-\sqrt{3}-1)^2+(-\sqrt{3}-1)+3)^2}x$$
$$y=\frac{1-2\sqrt{3}}{11}x$$



[55] f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها.

② أثبت أن d الذي معادلته $y=x-1$ مقاربٌ مائل للخط C.

③ ادرس الوضع النسبي للخطين d و C، ثم ارسم d و C.

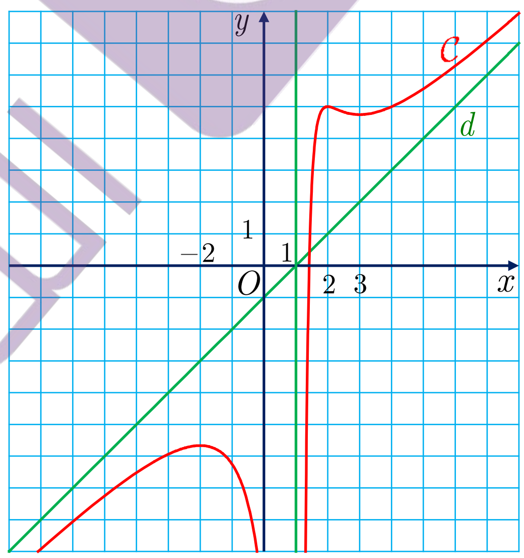
④ حدد هندسيا عدد حلول المعادلة

$x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$.

الحل: ① نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. وكذلك نلاحظ أن $\lim_{x\to1} f(x)=-\infty$. فنستنتج أن المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وبالاستفادة من الصيغة $f(x)=x-1+\frac{7x-10}{(x-1)^2}$ أو بحساب مباشر نجد

$$f'(x)=1+\frac{-7x+13}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2-4x+12}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{17}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{19}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$



② $g(x)=f(x)-(x-1)$ فنلاحظ أن $g(x)=\frac{7x-10}{(x-1)^2}$.

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط C.

③ ونستنتج مما سبق أن C و d يتقاطعان في النقطة $(\frac{10}{7},\frac{3}{7})$ ويكون C تحت d على $]-\infty,\frac{10}{7}[$ وفوق d على $]\frac{10}{7},+\infty[$.

④ $x^3-3x^2+10x-11-m(x^2-2x+1)=0$.

أي $x^3-3x^2+10x-11=m(x-1)^2$

نقسم طرفي المعادلة على $(x-1)^2$ فنجد

$\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}=m$ ومنه $f(x)=m$.

في حالة $m\in\{-\frac{17}{3},\frac{19}{4},5\}$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان.

- عند $-\frac{17}{3}<m<\frac{19}{4}$ أو $m>5$ للمعادلة $f(x)=m$ حل واحد.
- عند $\frac{19}{4}<m<5$ أو $m<-\frac{17}{3}$ للمعادلة $f(x)=m$ ثلاثة حلول.

[56] ليكن f المعرف وفق $f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$.

① قارن كلا من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$. استنتج أنه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$.

② أثبت أن $f'(x)=6\cos x\times\sin x(1-2\cos x)$.

③ ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$. ارسم C على $[-2\pi,2\pi]$.

الحل: ① نلاحظ أن

$$f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$$
$$f(-x)=3\sin^2(-x)+4\cos^3(-x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x=f(x)$$
$$f(x+2\pi)=3\sin^2(2\pi+x)+4\cos^3(2\pi+x)$$
$$=3\sin^2 x+4\cos^3 x=f(x)$$

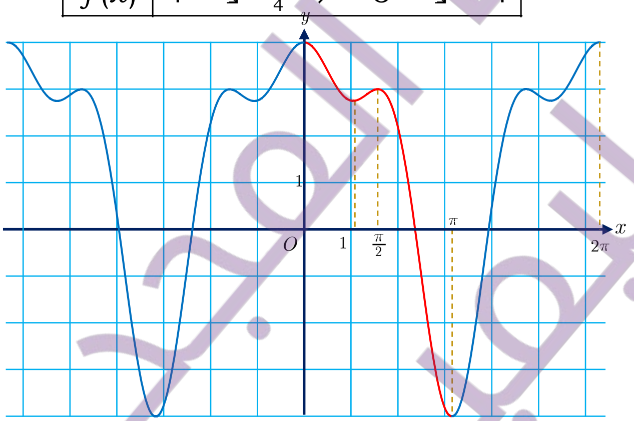
فالتابع f دوري ودوره 2π. إذن تكفي دراسة f على مجال طوله دور واحد وليكن $[-\pi,\pi]$. ولأن التابع زوجي فلدراسته على $[-\pi,\pi]$ تكفي دراسته على $[0,\pi]$.

② $$f'(x)=6\sin x\cos x-12\cos^2 x\sin x$$
$$=6\sin x\cdot\cos x\cdot(1-2\cos x)$$

③ على $]0,\pi[$ ينعدم $f'(x)$ عند

$$\cos x=0\Rightarrow x=\tfrac{\pi}{2},\quad \cos x=\tfrac{1}{2}\Rightarrow x=\tfrac{\pi}{3}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4



[57] ليكن f المعرف وفق $f(x)=4\sin^3 x+3\cos x$.

① أثبت أن $f(x+2\pi)=f(x)$، أيا يكن العدد الحقيقي x.

② تحقق أن $f'(x)=3\sin x(2\sin 2x-1)$.

③ ادرس f على مجال طوله 2π، وارسمه على $[-2\pi,2\pi]$.

الحل: ① لأن كل من sin و cos تابع دوري ودوره 2π.

② $$f'(x)=12\sin^2 x\cdot\cos x-3\sin x$$
$$=3\sin x\cdot(4\sin x\cos x-1)=3\sin x(2\sin 2x-1)$$

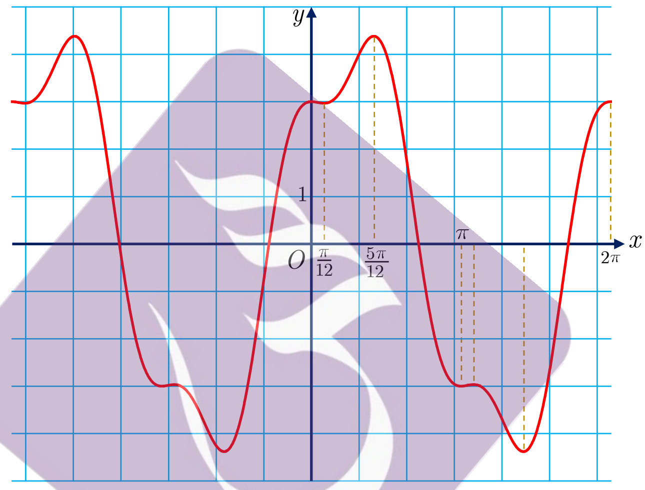
③ على $]0,2\pi[$ ينعدم $f'(x)$ عند

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi$

$2\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}, x = \frac{5\pi}{12}, x = \frac{13\pi}{12}, x = \frac{17\pi}{12}$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	3



[58] ليكن f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$.

a) تحقق أن $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ أيا يكن $x \geq 0$.

b) استنتج أن $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ في حالة $x > 0$.

c) ما نهاية f عند $+\infty$؟

الحل:

a) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

b) لدينا $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$ أياً كان $x > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$$

ومنه: $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

[59] f المعرف على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x) = 4x - \tan^2 x$.

① احسب $f'(x)$ وتحقق $\tan x = t$: $f'(x) = 2(1-t)(t^2+t+2)$

② استنتج جدولا بتغيرات f على المجال I.

③ أثبت أن للمعادلة $f(x) = -1$، في المجال I جذرا وحيدا α.

الحل: ① $f'(x) = 4 - 2\tan x \cdot (\tan^2 x + 1)$

$= -2t^3 - 2t + 4 = 2(1-t)(t^2+t+2)$

② t^2+t+2 موجب في حالة $t \geq 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1-t = 1-\tan x$ الذي ينعدم على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ عند $x = \frac{\pi}{4}$.

نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x) = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = +\infty$

ومنه $x = \frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi-1$	$\searrow$	$-\infty \Vert$

③ $-1 \notin f([0,\frac{\pi}{4}]) = [0, \pi-1]$ ليس للمعادلة $f(x) = -1$ حل في $[0, \frac{\pi}{4}]$

للمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد على المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

لأن f مستمر ومتناقص تماما على $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

و $-1 \in f(]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, \pi-1[$.

فللمعادلة $f(x) = -1$ حل وحيد α في المجال I.

[60] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x\cos x$.

① احسب عند كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$.

② أثبت $f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1)\times\dfrac{\pi}{2}\right)$

الحل: ① هنا لدينا

$$f(x) = x\cos x$$
$$f'(x) = -x\sin x + \cos x$$
$$f''(x) = -x\cos x - 2\sin x$$
$$f'''(x) = x\sin x - 3\cos x$$

② لدينا $\cos'(x+a) = -\sin(x+a) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$.

$$E(n) \to f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$E(n) \to f^{(n+1)}(x) = x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) = -x\sin x + \cos x = x\cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) + 1\times\cos\left(x+0\times\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$E(1)$ محققة نفرض $E(n)$ صحيحة ولنثبت صحة $E(n+1)$.

$$f^{(n+1)}(x) = x\cos'\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos'\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

أي إن $E(n+1)$ صحيحة. ومنه صحة الخاصة $E(n)$

[61] f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

① أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.

② استنتج عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x من $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

الحل: ① لدينا $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}$ وبتوحيد المقامات

$$\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x}{x^2-1}$$

$$\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}$$

ومنه $a+b=2$ و $a-b=0$

أي $a=b=1$ ومنه

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

② نثبت بالاستقراء $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ ومنه

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$ و $$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

[62] نفترض وجود تابع f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها، ويحقق $f(0)=0$ و $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

① a ليكن g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$.

تحقق أن g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$.

b احسب $g(0)$ واستنتج أن التابع f فردي.

② a h معرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

تحقق أن h اشتقاقي على I، واحسب $h'(x)$ على I.

b أثبت أن $h(x)=2f(1)$، أيا يكن x من I.

c استنتج أن نهاية f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$. ماذا تستنتج؟

③ a k معرف على $J=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $k(x)=f(\tan x)-x$.

احسب $k'(x)$. ماذا تستنتج بشأن التابع k؟

b احسب $f(1)$. ونظم جدولا بتغيرات f على $\mathbb{R}$.

c ارسم المستقيمات المقاربة للخط البياني C وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها -1 و 0 و 1، ثُم ارسم C

الحل: ① a لدينا f اشتقاقيا على $\mathbb{R}$ وبالتالي $g:x\mapsto f(x)+f(-x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

ولدينا $g'(x)=f'(x)-f'(-x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(-x)^2}=0$

b التابع g تابع ثابت ولدينا $g(0)=2f(0)=0$ إذن $g=0$ على $\mathbb{R}$. ومنه التابع f تابع فردي.

② a f اشتقاقيا على $\mathbb{R}$ و $x\mapsto\frac{1}{x}$ اشتقاقي على $I=]0,+\infty[$

وبالتالي $h:x\mapsto f(x)+f(1/x)$ اشتقاقي على I

ولدينا $h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x^{-2}}=0$

b أن h تابع ثابت على I ولأن $h(1)=2f(1)$

وبالتالي $h(x)=2f(1)$ أيا كانت قيمة x من I.

c لدينا $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)=0$

في حالة $x>0$ لدينا $f(x)=2f(1)-f\left(\frac{1}{x}\right)$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2f(1)-0=2f(1)$.

إذن يقبل الخط للتابع f مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=2f(1)$.

③ a في حالة x من J لدينا

$$k'(x)=f'(\tan x)\left(1+\tan^2 x\right)-1=\frac{1}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right)-1=0$$

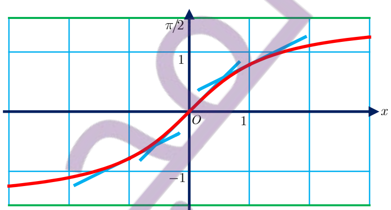
إذن التابع k تابع ثابت على J ولكن $k(0)=f(0)-0=0$

إذن $f(\tan x)=x$ على J.

b باختيار $x=\frac{\pi}{4}$ نجد $f(1)=\frac{\pi}{4}$. وبالاستفادة من كون f فرديا:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

c معادلة المماس في $(1,\frac{\pi}{4})$ هي $y=\frac{\pi-2}{4}+\frac{1}{2}x$. ومنه الرسم الآتي:



المتتاليات

1. تعريف المتتالية:

هي تابع مجموعة تعريفه مجموعة الأعداد الطبيعية أو جزء غير منته منها متعاقب أي بالشكل $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$.

♣ للمتتالية عددٌ لا نهائيٌّ من الحدود.

ويمكن التعبير عنها بعدة طرق منها:

● طريقة التعريف الصريح أي بدلالة n أي بالشكل $u_n = f(n)$:

مثال1: $u_n = (n+1)^2$ جد u_1, u_2, u_3 و u_{n+1}, u_n+1

$u_1 = 4,\quad u_2 = 9,\quad u_3 = 16,$

$u_{n+1} = (n+2)^2,\quad u_n + 1 = (n+1)^2 + 1$

[1] $u_n = 2n+3$ جد u_1, u_2, u_3 و u_{n+1}, u_n+1.

الحل:

[2] $u_n = 1+2+\cdots+n$ جد u_1, u_2, u_3 و u_{n+1} و $u_{n+1}-u_n$.

الحل:

[3] $u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ جد u_1, u_2, u_3 و u_{n+1} و $u_{n+1}-u_n$.

الحل:

● طريقة التدريج وأحد اشكالها هو الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$:

مثال2: $u_{n+1} = 3u_n - 2$ و $u_0 = 2$ جد u_1, u_2, u_3 و u_{n+2}

$u_1 = 3u_0 - 2 = 4,\ u_2 = 3u_1 - 2 = 10, u_3 = 3u_2 - 2 = 28$

$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2$

[4] $u_{n+1} = 2u_n + 3$ و $u_0 = 2$ جد u_1, u_2, u_3.

الحل:

[5] $u_{n+1} = (u_n)^2 - 1$ و $u_0 = 2$ جد u_1, u_2, u_3.

الحل:

[6] $u_{n+1} = u_n^2 + n - 2$ و $u_0 = -2$ جد u_1, u_2, u_3.

الحل:

2. اطراد متتالية معرفة بالتعريف الصريح:

♣ هنا نستعمل مبرهنة الاطراد:

$(u_n)_{n\ge 0}$ متزايدة تماماً $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

و $(u_n)_{n\ge 0}$ متزايدة $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \ge 0 \Leftrightarrow$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$

$(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة تماماً $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

و $(u_n)_{n\ge 0}$ متناقصة $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \le 0 \Leftrightarrow$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$

$(u_n)_{n\ge 0}$ ثابتة $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 0$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

♣ تكون المتتالية مطردة إذا حققت صفة واحدة من السابق.

♣ يوجد ثلاث طرق لدراسة اطراد متتالية معرفة بالتعريف الصريح:

طريقة الطرح: نوجد $u_{n+1}-u_n$ ونقارن مع الصفر.

طريقة القسمة: نوجد $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونقارن مع الواحد.

طريقة التابع: نعرف f بالعلاقة $u_n=f(n)$. ونشتق التابع ونقارن مع الصفر. ويكون اطراد المتتالية من اطراد التابع والعكس غير صحيح بالضرورة.

مثال3: ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_n=3n+5$

الحل: نوجد $u_{n+1}=3(n+1)+5=3n+8$

طريقة الطرح: نلاحظ $u_{n+1}-u_n=3n+8-(3n+5)=3>0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

طريقة القسمة: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n+8}{3n+5}>1$ فالمتتالية متزايدة تماماً.

طريقة التابع: نعرف f بالعلاقة $u_n=f(n)$ أي $f(x)=3x+5$

فيكون $f'(x)=3>0$ فالتابع متزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

غالبية: عند دراسة اطراد متتالية معرفة بالتعريف الصريح غالباً في حالة

- التابع الكسري والجذري: نستعمل طريقة التابع.
- وجود n ضمن (أس أو عاملي فقط) نستعمل طريقة القسمة.
- متتالية المجاميع وباقي الحالات نستعمل طريقة الطرح.

♣ لا يمكن استعمال طريقة القسمة الا إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماماً

♣ الرمز $n!$ يعني جداء العدد n تنازليا إلى الواحد.

أي $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times1$ وأن $0!=1$.

مثل: $3!=3\times2\times1=6,\quad 5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

يمكن كتابة $5!=5\times4!$ وهكذا $n!=n\times(n-1)!$

[7] ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية.

ⓐ $u_n=n^2+3$ ⓑ $u_n=\sqrt{3n+1}$ ⓒ $u_n=\frac{2n-1}{n+4}$

ⓓ $u_n=\frac{n!}{2^n}$ ⓔ $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ ⓕ $u_n=2^n$

ⓖ $u_n=-\frac{1}{n}$ ⓗ $u_n=\frac{n^2}{n!}$ ⓘ $u_n=\frac{n}{10^n}$

الحل:

سما المجد التعليمية

3. المتتاليات الحسابية:

المتتالية الحسابية: هي متتالية ينتج كل حد فيها عن سابقه بجمعه إلى عدد ثابت نسميه أساس المتتالية ونرمز له بالرمز r.

مثل: $\underbrace{3,\ 5}_{+2},\ 7,\ 9,\ldots.$ الأساس هو $r=2$

إثباتها: نثبت أن $u_{n+1}-u_n$ ثابت لا يتعلق بالدليل n.

[8] $u_n=-5n+1$ في حالة $n\in\mathbb{N}$. أثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ حسابية

الحل:

التعريف الصريح: أي بدلالة n هو $u_n=u_m+(n-m)r$

[9] $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها 2 وفيها $u_1=4$. احسب u_n بدلالة n.

الحل:

التعريف بالتدريج: أي بدلالة u_n هو $u_{n+1}=u_n+r$

[10] $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية $u_{n+1}=u_n+3$, $u_0=2$. أثبت أنها حسابية وعين أساسها.

الحل:

خاصة: a و b و c حدود متوالية في متتالية حسابية فإن $\frac{a+c}{2}=b$

[11] m و $2m$ و 12 حدود متوالية في متتالية حسابية احسب m.

الحل:

عدد الحدود: عدد الحدود $u_i,u_{i+1},\cdots,u_j$ هو $j-i+1$.

[12] ما عدد الحدود $u_{30},u_{31},\cdots,u_{50}$.

الحل:

مجموع الحدود:

$$S=(\text{عدد الحدود})\times\frac{\text{أول حدّ}+\text{آخر حدّ}}{2}$$

[13] ليكن $u_n=-5n+3$ حسابية. جد $u_1+u_2+\cdots+u_{10}$.

الحل:

4. المتتاليات الهندسية:

المتتالية الهندسية: هي متتالية ينتج كل حد فيها عن سابقه بضربه بعدد ثابت نسميه أساس المتتالية ونرمز له بالرمز q.

مثل: $\underbrace{3,\ 6}_{\times 2},\ 12,\ 24,....$ الأساس هو $q=2$

إثباتها: نثبت أن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثابت لا يتعلق بالدليل n.

[14] $u_n = 7^{n+1}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية.

الحل:

التعريف الصريح: أي بدلالة n هو $u_n = u_m q^{n-m}$

[15] $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$. احسب u_n بدلالة n.

الحل:

التعريف بالتدريج: أي بدلالة u_n هو $u_{n+1} = q \times u_n$

[16] $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية $u_{n+1} = 6u_n$, $u_0 = 1$. أثبت أنها هندسية وعين أساسها.

الحل:

خاصة: a و b و c حدود متوالية في متتالية هندسية فإن $b^2 = ac$

[17] 3 و m و 12 حدود متوالية في متتالية هندسية احسب m.

الحل:

مجموع الحدود: $S = (\text{أول حد}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

[18] $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_1 = -2$. احسب $u_1 + u_2 + \cdots + u_6$

الحل:

[19] ليكن $u_n = 2 \times 3^{n+2}$ هندسية. جد $u_1 + u_2 + \cdots + u_5$.

الحل:

[20] ليكن $u_n = -5n + 3$ في حالة $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ حسابية وجد أساسها وادرس اطرادها.

الحل: $u_{n+1} - u_n = (-5n-2) - (-5n+3) = -5$

الفرق ثابت فهي حسابية.

$u_{n+1} - u_n = -5 < 0$ الفرق سالب تماماً فهي متناقصة تماماً.

	الحسابية	الهندسية
مثال	$\underbrace{2,\ 5}_{+3},\ 8,\ 11,....$	$\underbrace{2,\ 6}_{\times 3},\ 18,\ 54,....$
الصريح	$u_n = u_m + (n-m)r$	$u_n = u_m q^{n-m}$
التدريج	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
اثباتها	نثبت أن $u_{n+1} - u_n$ ثابت لا يتعلق بالدليل n	نثبت أن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثابت لا يتعلق بالدليل n.
خاصة	a و b و c متوالية في متتالية حسابية فإن $\frac{a+c}{2} = b$	a و b و c متوالية من متتالية هندسية فإن $b^2 = ac$
الحدود	عدد الحدود $S = u_i + u_{i+1} + \cdots + u_j$ هو $j - i + 1$.	
المجموع	$S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{أول حد} + \text{آخر حد}}{2}$	$S = (\text{أول حد}) \times \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

مثال4: ليكن $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ هندسية وجد أساسها وادرس اطرادها.

الحل: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}$ القسمة ثابتة فهي هندسية.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3} < 1$ القسمة أصغر تماماً من 1 فهي متناقصة تماماً.

♣ إذا علم حدان من متتالية حسابية أو هندسية نستعمل قاعدة التعريف الصريح لإيجاد الأساس.

♣ لا نستطيع جمع متتالية حسابية أو هندسية وفق القاعدة ألا إذا كانت حدودها متعاقبة.

مثال5: $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$.

احسب r ثم اكتب u_n بدلالة n ثم احسب u_{20}.

الحل: $u_n = u_m + (n-m)r \Rightarrow u_5 - u_2 = (5-2)r$

$$-54 = 3r \Rightarrow r = -18$$

$$u_n = u_m + (n-m)r \Rightarrow u_n = 41 + (n-2)(-18)$$

$$u_n = 77 - 18n \Rightarrow u_{20} = -283$$

مثال6: $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية فيها $u_7 = \frac{1}{1080}$ و $u_{10} = \frac{25}{2197}$.

احسب q ثم اكتب u_n بدلالة n ثم جد u_{30}

الحل: $u_n = u_m q^{n-m} \Rightarrow u_{10} = u_7 \cdot q^{10-7}$

$$\frac{25}{2197} = \frac{1}{1080} q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{25 \times 1080}{2197} = \frac{5^3 \times 6^3}{13^3}$$

ومنه $q = \frac{30}{13}$ أي $u_n = u_m q^{n-m} = \frac{25}{2197} \cdot \left(\frac{30}{13}\right)^{n-10}$

ومنه $u_{30} = u_{10} \cdot \left(\frac{30}{13}\right)^{30-10} = \frac{25}{2197} \cdot \left(\frac{30}{13}\right)^{20}$.

[21] الأسئلة الآتية تتعلق بمتتاليات حسابية أو هندسية:

ⓐ $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$. احسب u_n بدلالة n، واستنتج $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

ⓑ $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$. احسب u_n بدلالة n، واستنتج $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$ و $u_2 + u_4 + u_6 \cdots + u_{2n}$.

ⓒ احسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$.

ⓓ احسب المجموع $s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{81}$.

ⓔ احسب بدلالة n، المجموع $s = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^n}$.

الحل:

[22] a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية. عينها علما $a+b+c=26$ و $abc=216$.

الحل:

[23] a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a\neq 0$. و a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، أساسها q. ولدينا $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية. احسب q.

الحل:

5. الإثبات بالتدريج (الاستقراء الرياضي):

♣ نستعمل الاستقراء لإثبات صحة خاصة تحوي العدد الطبيعي n.

♣ الخطوات:

① نكتب الخاصة $E(n)$

② نثبت صحة $E(n_0)$ حيث أصغر عدد يمكن التعويض فيه.

③ نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$ اعتمادا على $E(n)$

مثال7: $n\geq 1$ عدد طبيعي أثبت أن $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

الحل:

مثال8: في حالة عدد طبيعي $n \ge 1$ أثبت أن

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحل:

مثال9: أثبت أنّه مهما كان n كان 4^n+2 مضاعفاً للعدد 3.

$E(n) \to$ « 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3 »

$E(n+1) \to$ « $4^{n+1}+2$ مضاعفٌ للعدد 3 »

الحل: نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$E(0) \to$ « $4^0+2=3$ مضاعفٌ للعدد 3 »

ومنه $E(0)$ محققة. نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$ من الخاصة $E(n)$ يوجد عدد طبيعي k يحقق $4^n+2=3k$ أي $4^n=3k-2$.

$$\begin{aligned}4^{n+1}+2 &= 4^n\times4+2=(3k-2)\times4+2\\ &=12k-8+2=12k-6\\ &=3(4k-2)=3k'\end{aligned}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة.

مثال10: أثبت صحة الخاصتين الآتيتين أياً كان العدد الطبيعي n.

① « $2^{3n}-1$ مضاعفٌ للعدد 7».

② « n^3+2n مضاعفٌ للعدد 3».

الحل: ① لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أن العدد $2^0-1=0$ مضاعفٌ للعدد 7.
- لنفترض أن $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $2^{3n}-1=7k$ عندئذ

$$2^{3(n+1)}-1=8\times2^{3n}-1=8(7k+1)-1=7(8k+1)$$

ومنه $2^{3(n+1)}-1$ مضاعف للعدد 7 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. ومنه صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: n^3+2n مضاعف للعدد 3.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أن العدد $0^3+2\times0=0$ مضاعفٌ للعدد 3.
- لنفترض أن $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $n^3+2n=3k$ عندئذ

$$\begin{aligned}&(n+1)^3+2(n+1)=n^3+2n+3(n^2+n+1)\\ &=3\left(k+n^2+n+1\right)\end{aligned}$$

ومنه $(n+1)^3+2(n+1)$ مضاعف للعدد 3 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

مثال11: أثبت $n\ge1$: $1+2\times2!+3\times3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$

الحل: $E(n)\to 1+2\times2!+3\times3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$

$E(n+1)\to 1+2\times2!+3\times3!+\cdots+(n+1)\times(n+1)!=(n+2)!-1$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$: $E(1)\to1=1$.

ومنه $E(1)$ محققة. نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

$$\begin{aligned}\ell_1=E(n+1)&\to1+2\times2!+3\times3!+\cdots n\times n!+(n+1)\times(n+1)!\\ &=(n+1)!-1+(n+1)\times(n+1)!\\ &=(n+1)![1+n+1]-1=(n+1)!(n+2)-1\\ &=(n+2)!-1=\ell_2\end{aligned}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة.

[24] $n \geq 1$ عدد طبيعي و $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

ⓐ احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4. وعبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n.

ⓑ أثبت عند عدد طبيعي $n \geq 1$ أن: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

الحل:

[25] ليكن $x > -1$. أثبت أن المتراجحة $(1+x)^n \geq 1 + nx$

الحل:

ملاحظة: في المتراجحات يمكن تكبير الكبير أو تصغير الصغير.

[26] في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$، أثبت صحة الخاصة $n! \geq 2^{n-1}$.

الحل:

سما المجد التعليمية

[27] ⓐ أثبت، أياً كان العدد $n \geq 2$ ، أن: $3 \times n^2 \geq (n+1)^2$.

ⓑ ما أصغر عدد $n \in \mathbb{N}^*$ تكون $E(n) \to 3^n \geq 2^n + 5n^2$ صحيحة؟

ⓒ أثبت أن $E(n)$ صحيحة، أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 5$.

الحل:

[28] أثبت صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n .

ⓐ « $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3 ».

ⓑ « $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7 »

الحل:

سما المجد التعليمية

6. اطراد متتالية معرفة بالتدريج:

لدراسة اطراد متتالية معرفة بالتدريج نخمن الاطراد بإيجاد الحدود الأولى ثم نثبت صحة التخمين بالتدريج ولكن احياناً نستعمل طريقة الطرح أو القسمة.

مثال12: ادرس جهة اطراد المتتالية $u_{n+1} = 2u_n - 8$ حيث $u_0 = 2$

الحل: نوجد الحدود الأولى $u_0 = 2,\ u_1 = -4$ نخمن أن المتتالية متناقصة تماماً نثبت صحة التخمين بالتدريج

$$E(n) \to u_{n+1} < u_n$$
$$E(n+1) \to u_{n+2} < u_{n+1}$$

نثبت صحة الخاصة $E(0)$: $-4 < 2 : E(0) \to u_1 < u_0$.

ومنه الخاصة $E(0)$ محققة.

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

$$u_{n+1} < u_n$$
$$2u_{n+1} < 2u_n$$
$$2u_{n+1} - 8 < 2u_n - 8$$
$$u_{n+2} < u_{n+1}$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة.

♣ عند وجود عاملي أو أس n أو متتالية معرفة بالتدريج لا نستعمل طريقة التابع.

[29] أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالعلاقات: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$ متزايدة تماماً

الحل:

[30] بين أي المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطردة.

ⓐ $\begin{cases} u_0 = 8, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$

ⓒ $u_0 = 2,\ u_{n+1} = u_n - 3$ ⓓ $\{u_0 = 1,\ u_{n+1} = 2u_n$

الحل:

7. نهاية متتالية معرفة بالتعريف الصريح:

♣ نوجد نهايتها باعتبارها تابع أي حسب المبرهنة:

ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $[a,+\infty[$، ولتكن $u_n = f(n)$

عندما $a \le n$ إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \ell$ كان $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$

[31] احسب نهاية كل من $x_n = \dfrac{3n}{2n-1}$ و $y_n = n^3 - n + 1$

الحل:

♣ في حالة q^n نتبع القاعدة:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ \text{ليس للمتتالية نهاية} & q \le -1 \end{cases}$$

[32] احسب نهاية كل من المتتاليتين $x_n = \dfrac{3^n}{2^n}$ و $y_n = \dfrac{10^n}{(10.1)^n}$

الحل:

غالبية: في حالة وجود $\cos\infty,\ \sin\infty,\ (-1)^n$ نتبع مبرهنة الإحاطة.

مبرهنة الإحاطة: لتكن ثلاث متتاليات $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ و $(w_n)_{n\ge1}$.

إذا تحقق $w_n \le u_n \le v_n$ عند كل n أكبر من عدد n_0.

و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$. فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

مبرهنة المقارنة: لتكن متتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$، ولنفترض أن $u_n \le v_n$ عند كل n أكبر من n_0. عندئذ

إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ كان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

وإذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

[33] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$. تحقق أن $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \le u_n \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$، ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل:

[34] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة بالصيغة $u_n = n + 1 - \cos n$. تحقق أن $n \le u_n \le n+2$، وذلك $n \ge 1$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل:

[35] لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$. جد نهاية $(u_n)_{n\geq1}$.

الحل:

[36] فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ في حال وجودها:

ⓐ $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$ ⓑ $u_n = \frac{2n^2-1}{3n+5}$

ⓒ $u_n = \frac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$ ⓓ $u_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+1}}$

ⓔ $u_n = \sin\left(\frac{n\pi+1}{2n+1}\right)$ ⓖ $u_n = \frac{n!-2}{n!}$

الحل:

8. استعمال تعريف النهاية:

- ♣ لحساب مجهول موجود في البسط والمقام من نفس الدرجة نقسم البسط على المقام قسمة اقليدية ثم نكتب الكسر يساوي ناتج القسمة + باقي القسمة على المقسوم عليه.
- ♣ $-a < x < a \Leftrightarrow |x| < a$ أي عند وجود مقدار بين عدد ومعكوسه نحذف الجزء السالب ونضع المقدار بالقيمة المطلقة.
- ♣ نغير جهة التراجح عند الضرب أو القسمة على سالب أو قلب الطرفين.

[37] المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in \left]-10^{-3},10^{-3}\right[$ عند كل $n > n_0$.

الحل:

[38] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = n\sqrt{n}$. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

الحل:

[39] لتكن $u_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$ وتساوي نهايتها 3. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n \in]2.98, 3.02[$ عند n أكبر تماماً من n_0.

الحل:

9. محدودية متتالية:

- نقول إن المتتالية محدودة من الأعلى، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M يحقق $u_n \le M$. يسمى M عنصراً راجحاً على $(u_n)_{n\ge0}$.
- نقول إن متتاليةً محدودة من الأدنى، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m يحقق $t_n \ge m$. يسمى m عنصراً قاصراً عن المتتالية $(t_n)_{n\ge0}$.

الحدود الراجحة	حدود المتتالية	الحدود القاصرة

الحد الأعلى — الحد الأدنى

- نقول عن متتالية محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى والأدنى.
- الحد الأعلى هو أصغر الحدود الراجحة.
- الحد الأدنى هو أكبر الحدود القاصرة.

غالبية: لإيجاد محدودية متتالية **بالتعريف الصريح**

- نستعمل المحدوديات:

$$-1 \le \sin n \le 1, -1 \le \cos n \le 1,\quad 0 \le \sin^2 n \le 1,\ 0 \le \cos^2 n \le 1,$$

- نقارن مع الصفر أو مع الواحد.
- في حال وجود مجهول ومربعه نتمم الى مربع كامل.
- نستعمل شرط البدء $n \ge n_0$
- إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = +\infty$ فليس للمتتالية حد أعلى
- إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = -\infty$ فليس للمتتالية حد أدنى
- أحيانا نستعمل دراسة التغيرات.

$$-1 \le \sin n \le 1, -1 \le \cos n \le 1,\quad 0 \le \sin^2 n \le 1,$$
$$0 \le \cos^2 n \le 1,\ (\ )^2 \ge 0,\ \sqrt{\ } \ge 0,\ |\ | \ge 0$$

وأيضاً نستعمل شرط البدء $n \ge n_0$ وأحيانا نستعمل دراسة التغيرات.

[40] بين إذا $(u_n)_{n\ge1}$ محدودة، أو محدودة من الأعلى، أو من الأدنى.

ⓐ $u_n = 3 + 2\sin n$ ⓑ $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ ⓒ $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$

ⓓ $u_n = \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}}$ ⓔ $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ⓕ $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}$

ⓖ $u_n = n^2 + 2n - 1$ ⓗ $u_n = 3\cos n$ ⓘ $u_n = (-1)^n \times n^2$

الحل:

[41] تأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$.

أثبت أن $1 \leq u_n \leq 3$، أياً يكن العدد الطبيعي n.

الحل:

[42] المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n^2-5n+6}$.

أثبت أنها محدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$.

الحل:

♣ للمقارنة مع الصفر ندرس إشارة.

♣ للمقارنة مع الواحد نقارن البسط مع المقام.

♣ للمقارنة مع عدد آخر ننقل للطرف الأول وندرس إشارة.

[43] (دورة $2019-2$) $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$

ⓐ ادرس اطراد المتتالية.

ⓑ اثبت 2 عنصراً راجحاً عليها.

ⓒ جد نهايتها وجد العدد n_0 يجعل $u_n\in]1.9,2.1[$ عند $n>n_0$

الحل:

[44] ليكن $-1<q<1$ ، ولنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $u_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$. جد قيمة $S=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

الحل:

تقارب متتالية: تكون المتتالية متقاربة إذا كانت نهايتها عدد وتكون متباعدة إذا كانت نهايتها $+\infty$ أو $-\infty$ أو لها نتائج متعددة.

[45] ادرس تقارب: ⓐ $x_n=\dfrac{3^n-2^n}{3^n-1}$ ⓑ $y_n=\dfrac{10^n-1}{10^n+1}$.

الحل:

10. نهاية متتالية معرفة بالتدريج:

♣ **مبرهنة:** كل متتالية **متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة.** وكل متتالية **متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة.**

كل متتالية **متزايدة وغير محدودة من الأعلى** نهايتها $+\infty$ وكل متتالية **متناقصة وغير محدودة من الأدنى** نهايتها $-\infty$

♣ **لإثبات تقارب متتالية غالباً:** نثبت أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فتكون متقاربة من حدها الأعلى ℓ أو ثبت أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فتكون متقاربة من حدها الأدنى ℓ .

♣ في حالة المتتالية معرفة بالتعريف الصريح يكون ℓ نهايتها باعتبارها تابع. وفي حالة المتتالية معرفة بالتدريج يكون ℓ حل المعادلة $f(x)=x$ بشرط أن يكون التابع مستمر عند ℓ .

♣ بعد حل المعادلة $f(x)=x$ نختر النهاية اعتمادا على:

– نهاية المتتالية ℓ من المجال المغلق للمحدودية.

– الحد الأول والاطراد.

مثال13: المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة عند كل $n\geq1$ وفق

$$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

ⓐ أثبت أن $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$.

ⓑ استنتج أن العدد 3 راجحٌ على لمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$.

ⓒ أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة.

الحل: ⓐ لنضع الخاصة $E(n) \to \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ في حالة $n \ge 1$.

$$E(n+1) \to \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^n}$$

الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $\frac{1}{1!} = 1 = \frac{1}{2^0}$.

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n!} \le \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$\le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

ⓑ
$$u_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$
$$\le 1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$\le 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

ⓒ نلاحظ أن المتتالية متزايدة $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$، وهي محدودة من الأعلى. فهي متقاربة .

مثال14: المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة.

② أثبت أنَّ $u_n \le 2-\frac{1}{n}$ أيّاً يكن $n \ge 1$.

③ ماذا يمكنك أنْ تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل: ① للانتقال من الحد u_n إلى الحد الذي يليه u_{n+1} نجمع إلى u_n العدد الموجب تماماً $\frac{1}{(n+1)^2}$

أي $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة.

② لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $u_n \le 2-\frac{1}{n}$ في حالة $n \ge 1$.

• الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنها تنص على أن $u_1 = \frac{1}{1^2} \le 2-\frac{1}{1}$

• لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ عندئذ

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \le 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$\le 2-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

لإن

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$$

ومنه $u_{n+1} \le 2-\frac{1}{n+1}$.

أي إن الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

③ لدينا $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

♣ لإثبات محدودية أو اطراد لمتتالية بالتدريج نستعمل الاستقراء.

[46] نعرف $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

ⓐ أثبت بالتدريج أن $0 \le u_n \le 2$، أياً كان n.

ⓑ أثبت بالتدريج أن $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً.

ⓒ استنتج تقاربها وحدد نهايتها.

الحل:

سما المجد التعليمية

[47] $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6}$

ⓐ أثبت أن التابع $x \mapsto \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايدٌ تماماً

ⓑ استنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$، أياً كان العدد n.

ⓒ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

ⓓ ادرس تقاربها وحدد نهايتها.

الحل:

11. متتاليات متجاورة:

نقول عن متتالتين انهما **متجاورتان**، إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة، وكانت نهاية الفرق صفر. وعندها تكون المتتاليتان متقاربتين ولهما النهاية نفسها.

مثال15: المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = -\dfrac{1}{2n+4}$ و $s_n = \dfrac{1}{n+1}$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة.

الحل: $s_{n+1} - s_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

فالمتتالية $(s_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

$$t_{n+1}-t_n=-\frac{1}{2n+6}+\frac{1}{2n+4}=\frac{2}{(2n+4)(2n+6)}>0$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً. و $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=0$

فالمتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان ومتقاربتان من 0.

[48] $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق $t_n=\frac{n-1}{n}$

و $s_n=1+\frac{1}{n^2}$. أثبت أنهما متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة.

الحل:

[49] (دورة $1-2018$) $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المعرفتان وفق

$x_n=5-\frac{1}{n}$ و $y_n=5+\frac{1}{n^2}$. ادرس اطرادهما وعلل تجاورهما.

الحل:

[50] تبين إن كانت المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين أم لا.

ⓐ $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$ $\qquad y_n=x_n+\frac{1}{n}$

ⓑ $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$ $\qquad y_n=x_n+\frac{1}{2n}$

الحل:

ملاحظة: في حالة $u_{n+1} = f(u_n)$ يكون:

مهما يكن العدد x من D يكن $f(x)$ عنصراً من D

مطابقات:

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$

$$x^3 - a^3 = (x-a)\left(x^2 + xa + a^2\right)$$

$$x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1}\right)$$

تمارين عامة

[51] لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ معرفة تدريجياً وفق $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$.

ⓐ تحقق أن $v_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

ⓑ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.

ⓒ استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم جد نهايتها.

الحل:

[52] (دورة $2017-1$) نتأمل $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق:

$x_0 = 3$ ، $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$ و $y_n = x_n + 3$.

ⓐ أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

ⓑ احسب y_n ثم x_n بدلالة n.

ⓒ احسب $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$ بدلالة n.

ⓓ استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$.

الحل:

[53] المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1}$. ولتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

ⓐ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واحسب نهايتها.

ⓑ استنتج $(u_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n واحسب نهايتها.

الحل:

[54] تأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق $u_n = 5 - \frac{10}{n^2}$.

ⓐ أثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

ⓑ جد عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

ⓒ جد نهاية المتتالية ثم حدد الحد الأعلى.

ⓓ بين أي الأعداد الآتية راجح: 0، 6، 4.99999، 5 ؟

الحل:

[55] (دورة $2 - 2021$) لتكن $(u_n)_{n\geq0}: u_0 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = 2 + (u_n - 2)^2$

ⓐ أثبت $2 \leq u_n \leq 3$. ثم أثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة

ⓑ هل هي متقاربة؟ ثم جد نهايتها.

الحل:

[56] $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_0 = \dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1} = {u_n}^2 - 2u_n + 2$.

ⓐ أثبت أن $1 \leq u_n \leq 2$ أياً يكن $n \in \mathbb{N}$.

ⓑ أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$ أياً يكن $n \in \mathbb{N}$.

ⓒ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

ⓓ أهي متقاربة؟ وحدد نهايتها.

الحل:

[57] (دورة $2 - 2017$) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

ⓐ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة.

ⓑ أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$ ، ثم استنتج $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة وجد نهايتها.

الحل:

سما المجد التعليمية

[58] $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق: $u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$

لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.

a) أثبت أنَّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية.

b) عبّر عن v_n بدلالة n.

الحل:

سما المجد التعليمية

[59] لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة: $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

ⓐ ادرس اطراد المتتالية.

ⓑ أثبت بالتدريج أنّ $u_n \geq n^2$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$.

ⓒ احسب $u_1,\ u_2,\ u_3$. ثم خمن u_n بدلالة n واثبت ذلك.

الحل:

[60] جد نهاية المتتاليات $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ و $(w_n)_{n\geq1}$ و $(t_n)_{n\geq1}$:

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1},\quad y_n = \frac{x_n}{n},\quad w_n = x_n - n,\quad t_n = \frac{y_n - 1}{w_n - 1}$$

الحل:

[61] ليكن $x_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ و $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$.

عبِّر عن S_n بدلالة n . واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$

الحل:

[62] (دورة 1 – 2019) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة بالصيغة:

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

ⓐ ادرس اطراد المتتالية.

ⓑ أثبت أن $u_n = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3^n})$ واستنتج عنصراً راجحاً عليها

ⓒ هل هي متقاربة؟ ثم جد نهايتها وحدها الأعلى.

الحل:

سما المجد التعليمية

[63] لتكن المتتالية: $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$

ⓐ أثبت أن $n \le 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

ⓑ استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

ⓒ أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً. أهي متقاربة.

الحل:

[64] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة عند $n \ge 1$ وفق:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

ⓐ أثبت أن $\frac{n^2}{n^2+n} \le u_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$، أياً يكن $n \ge 1$.

ⓑ استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل:

[65] المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$

في حالة عدد طبيعي غير معدوم n.

ⓐ احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 ثم خمن عبارة u_n بدلالة n.

ⓑ أثبت صحة تخمينك.

الحل:

إنشاء حدود متتالية معرفة بالتدريج هندسياً

- نرسم خط التابع f وخط المنصف $y = x$.
- نوجد نقطة التقاطع بينهما بحل المعادلة $f(x) = x$.
- نعيين u_0 ثم نكتر وفق التابع ونرجع وفق المنصف.

[66] مثل هندسياً الحدود الأولى من المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، ثم خمن جهة اطردها إذا كانت مطردة ونهايتها المحتملة.

ⓐ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$.

ⓑ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$.

ⓒ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n + 2$.

الحل:

سما المجد التعليمية

[67] (دورة $1-2020$) المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0=2$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+\dfrac{2}{u_n}$.

ⓐ ليكن $u_{n+1}=f(u_n)$ ، ادرس تغيرات f المعرف على $]0,+\infty[$.

ⓑ برهن بالتدريج أن : $2\leq u_{n+1}\leq u_n$ مهما كان العدد n.

ⓒ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

[68] $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=-\dfrac{1}{3}u_n{}^2+2u_n$.

ⓐ نرمز بالرمز f إلى التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+2x$. ادرس تغيرات ونظم جدولاً بها.

ⓑ أثبت أنه إذا انتمى x إلى $[0,3]$ انتمى $f(x)$ إلى $[0,3]$.

ⓒ استنتج أن: العدد 3 عنصرٌ راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$. وأن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

ⓓ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

[69] $\mathcal{H}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x-5y=1$. ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي $\mathcal{P}$ النقطة $M'(6x-10y,x-y)$ ، أي $f(M)=M'$.

لتكن $S_0(1,0)$ ، ومتتالية النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $S_{n+1}=f(S_n)$. أثبت أنَّ S_n نقطة من المجموعة $\mathcal{H}$.

الحل:

سما المجد التعليمية

♣ عند اشتقاق $\sin$ أو $\cos$ يمكن أن نضيف الى الزاوية $\frac{\pi}{2}$ أي:

$$(\sin x)' = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right), (\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

[70] ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sin 3x$

ⓐ أوجد المشتقات المتتالية للتابع f حتى المرتبة الثالثة.

ⓑ أثبت أنه أياً كان $n \in \mathbb{N}^*$ ، فإن $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}+3x\right)$

الحل:

[71] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

عندئذ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

الحل:

تمارين عامة محلولة

[72] ليكن $n \ge 1$ و $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ و $v_n = u_{2n} - u_n$. أثبت أنَّ المتتالية (v_n) متزايدة تماماً.

الحل: لدينا $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

و $u_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$

نكتب v_n و v_{n+1} نجد

$$v_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

بالطرح

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

[73] ليكن θ عددٌ حقيقي من $]0,\frac{\pi}{2}[$. والمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0 = 2\cos\theta$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$.

① احسب u_1 و u_2.

② أثبت بالتدريج، أنَّ $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

الحل: ① هنا $\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[$

$$u_1 = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2(\theta/2)} = \left|2\cos\tfrac{\theta}{2}\right| = 2\cos\tfrac{\theta}{2}$$

$$u_2 = \sqrt{2(1+\cos\tfrac{\theta}{2})} = \sqrt{4\cos^2(\theta/4)} = 2\cos\tfrac{\theta}{4}$$

② $E(n) \to u_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n},\ E(n+1) \to u_{n+1} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$.

إن $E(0)$ محققة. لنفترض أن $E(n)$ محققة ولنثبت $E(n+1)$ عندئذ

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+2\cos(\theta/2^n)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta/2^n}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

ومنه الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً ومنه صحة الخاصة $E(n)$.

[74] ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ في حالة $n \ge 1$. وليكن $S_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ جد S_n بدلالة n.

الحل: نوجد الحدود الستة الأولى

n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

نلاحظ أن $S_n = \frac{n}{n+1}$ ولنثبت صحة العلاقة $S_n = \frac{n}{n+1}$

$E(n) \quad \to \{S_n = \frac{n}{n+1} : n \ge 1\}$

$E(n+1) \to \{S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\}$

الخاصة $E(1)$ محققة حيث $S_1 = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{1+1}$.

نفرض صحة العلاقة $E(n)$ ونثبت صحة العلاقة $E(n+1)$

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

ومنه $E(n+1)$ محققة. ومنه $S_n = \frac{n}{n+1}$ أياً كانت $n \ge 1$.

[75] ليكن عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

① أوجد عددين حقيقيَّين a و b يحققان $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$.

② ليكن، في حالة عدد طبيعي n، $S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$. عبّرْ عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\ge0}$.

الحل: ① $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$.

②
$$S_n = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n$$

$$= \left(\frac{\frac12}{-1}-\frac{\frac12}{1}\right)+\left(\frac{\frac12}{1}-\frac{\frac12}{3}\right)+\left(\frac{\frac12}{3}-\frac{\frac12}{5}\right)+$$

$$\cdots+\left(\frac{\frac12}{2n-3}-\frac{\frac12}{2n-1}\right)+\left(\frac{\frac12}{2n-1}-\frac{\frac12}{2n+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$$

ومنه $S_n = -\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2} = -\frac{2n+3}{4n+2}$ ومنه $\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{2}$.

[76] لتكن المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$، المعرفتين تدريجياً وفق:

- $t_0 = 1$ و $s_0 = 12$.
- $t_{n+1} = \frac{t_n+2s_n}{3}$ و $s_{n+1} = \frac{t_n+3s_n}{4}$.

ⓐ أثبت أن المتتالية $h_n = s_n - t_n$ هندسية. واحسب نهايتها.

ⓑ أثبت أن المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ متجاورتان.

ⓒ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة وفق $u_n = 3t_n+8s_n$ ثابتة.

ⓓ جد نهاية كل من المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$؟

الحل: ⓐ
$$h_{n+1} = s_{n+1}-t_{n+1} = \frac{3t_n+9s_n}{12} - \frac{4t_n+8s_n}{12}$$

$$h_{n+1} = \frac{1}{12}(s_n-t_n) = \frac{1}{12}h_n \Rightarrow \frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{1}{12}$$

$(h_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية، أساسها $q = \frac{1}{12}$. $h_0 = s_0 - t_0 = 11$

$h_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ولكن $-1 < \frac{1}{12} < 1$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$

ونلاحظ $s_n - t_n > 0$، أياً يكن n.

ⓑ $t_{n+1}-t_n=\frac{t_n+2s_n}{3}-\frac{3t_n}{3}=\frac{2}{3}(s_n-t_n)>0$

المتتالية $(t_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً

$$s_{n+1}-s_n=\frac{t_n+3s_n}{4}-\frac{4s_n}{4}=-\frac{1}{4}(s_n-t_n)<0$$

المتتالية $(s_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً. و $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$

ومنه المتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ متجاورتان ومتقاربتان من ℓ.

ⓒ $u_{n+1}-u_n=3t_{n+1}+8s_{n+1}-(3t_n+8s_n)=0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ ثابتة. ولإيجاد قيمتها الثابتة، نضع

$$u_n=u_0=3t_0+8s_0=3(1)+8(12)=99$$

ⓓ المتتاليات $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ و $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة، ومنه

$$99=\lim_{n\to+\infty}u_n=3\lim_{n\to+\infty}t_n+8\lim_{n\to+\infty}s_n=3\ell+8\ell$$

ومنه $\ell=9$، فالمتتاليتان $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ متقاربتان من العدد 9.

[77] المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

ⓐ أثبت أن $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ثم استنتج أن $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة.

ⓑ أثبت أن $0<u_n\le1$، أياً يكن n.

ⓒ أثبت أنه إذا كان $n>10^4$، كان $0<u_n<10^{-2}$.

ⓓ أثبت أنه إذا كان $n>10^8$، كان $0<u_n<10^{-4}$.

ⓔ كيف نختار n كي نحصل على $u_n<10^{-8}$؟

ⓕ ليكن $v_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$ استنتج v_n بدلالة n.

ⓖ استنتج $1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

ⓗ استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$.

الحل: ⓐ نضرب بالمرافق فنجد

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{n+1-n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0$$

ⓑ لدينا $n\ge0$ وبالتالي $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\ge\sqrt{0+1}+\sqrt{0}=1$

أي $0<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\le1$

ⓒ إذا كان $n>10^4$ فإن $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}>\sqrt{10^4}=10^2$

ومن $0<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{10^2}$ أي $0<u_n<\frac{1}{10^2}$

أي $0<u_n<10^{-2}$

ⓓ إذا كان $n>10^8$ فإن $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}>\sqrt{10^8}=10^4$

ومن $0<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{10^4}$ أي $0<u_n<\frac{1}{10^4}$

أي $0<u_n<10^{-4}$

ⓔ بالاستعانة بما سبق يمكن أن نختار $n>10^{16}$ فيكون

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}>\sqrt{10^{16}}=10^8$$

ومن $0<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{10^8}$ أي $0<u_n<\frac{1}{10^8}$

أي $0<u_n<10^{-8}$

ⓕ نلاحظ أن $v_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-2}+u_{n-1}$

$$=\sqrt{1}-0+\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+$$
$$\cdots+\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}$$

ⓖ $1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

$$=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-2}+u_{n-1}=\sqrt{n}$$

ⓗ $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=+\infty$.

[78] نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرّفة بالتدريج وفق:

$$u_0=1,\ u_1=4,\ u_{n+1}=5u_n-6u_{n-1}\qquad (n\ge1)$$

① عيّن عددين حقيقيين a و b يحققان $a+b=5$ و $ab=6$.

② لتكن $(v_n)_{n\ge0}$ المتتالية $v_n=u_{n+1}-au_n$. أثبت أنّ $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسُها b.

③ لتكن $(w_n)_{n\ge0}$ المتتالية $w_n=u_{n+1}-bu_n$. أثبت أنّ $(w_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسُها a.

④ عبّر عن v_n و w_n بدلالة n. ثُمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

الحل: ① عددان مجموعهما 5 وجداء ضربهما 6 هما 2 و 3 يمكننا ومنه أن نأخذ $a=2$ و $b=3$.

② نضع $v_n=u_{n+1}-2u_n$ عندئذ يكون لدينا

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+2}-2u_{n+1}}{v_n}=\frac{5u_{n+1}-6u_n-2u_{n+1}}{v_n}$$

$$=\frac{3u_{n+1}-6u_n}{v_n}=\frac{3(u_{n+1}-2u_n)}{v_n}=\frac{3v_n}{v_n}=3$$

أو $v_{n+1}=3v_n$ فالمتتالية $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها 3.

③ نضع $w_n=u_{n+1}-3u_n$ عندئذ يكون لدينا

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{u_{n+2}-3u_{n+1}}{w_n}=\frac{5u_{n+1}-6u_n-3u_{n+1}}{w_n}$$

$$=\frac{2u_{n+1}-6u_n}{w_n}=\frac{2(u_{n+1}-3u_n)}{w_n}=\frac{2w_n}{w_n}=2$$

أو $w_{n+1}=2w_n$ فالمتتالية $(w_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها 2.

④ ومنه نستنتج أن $v_n=3^nv_0=2\times3^n$ و $w_n=2^nw_0=2^n$.

أو $u_{n+1}-2u_n=2\times3^n$ و $u_{n+1}-3u_n=2^n$.

وبطرح الأخيرة من الأولى نستنتج $u_n=2\times3^n-2^n$ أياً كانت n.

[79] المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0=3$ و $u_{n+1}=-u_n+4$ في حالة عدد طبيعي n. احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 وخمّنْ عبارة u_n بدلالة n ثمَّ حدد u_n بدلالة n.

الحل: ننظم جدول بالأعداد u_1، u_2، u_3، u_4، u_5

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	1	3	1	3	1

التخمين: نلاحظ عند حساب حدود المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ نضرب في كل مرة بالعدد -1 لذلك ننظم جدولاً يضم الحدود وقوى العدد -1 فنجد

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	1	3	1	3	1
$(-1)^n$	1	-1	1	-1	1	-1

نلاحظ $u_n-(-1)^n=2$ ومنه يكتب u_n بالصيغة $u_n=2+(-1)^n$،

الأثبات: نبرهن الخاصة $E(n)\to u_n=2+(-1)^n$ حيث $n\ge0$ و $E(n+1)\to u_{n+1}=2+(-1)^{n+1}$

• الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $E(0)\to u_0=2+(-1)^0=3$.

• لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. ولنثبت $E(n+1)$ عندئذ

$$u_{n+1}=-u_n+4=-2-(-1)^n+4=2-(-1)^n=2+(-1)^{n+1}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة، والخاصة $E(n)$ صحيحة

[80] نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0=7$ و $u_{n+1}=10u_n-18$ عند كل عدد طبيعي n. احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 ... ثم اقترح u_n بدلالة n. ثُم أثبت صحة اقتراحك.

الحل: ننظم جدول بالحدود u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 ...

n	0	1	2	3	4	5
u_n	7	52	502	5002	50002	500002

التخمين: نلاحظ عند حساب حدود المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ نضرب في كل مرة بالعدد 10 لذلك ننظم جدولاً يضم الحدود وقوى العدد 10 فنجد

n	0	1	2	3	4	5
u_n	7	52	502	5002	50002	500002
$(10)^n$	1	10	100	1000	10000	100000

نلاحظ $u_n-5(10)^n=2$ أي $u_n=2+5(10)^n$،

نبرهن الخاصة $E(n)\to u_n=5\times10^n+2$ حيث $n\ge0$

و $E(n+1)\to u_{n+1}=5\times10^{n+1}+2$

• الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $5+2=7$.

• لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. ولنثبت $E(n+1)$ عندئذ

$$u_{n+1}=10u_n-18=10(5\times10^n+2)-18=5\times10^{n+1}+2$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة، والخاصة $E(n)$ صحيحة

[81] نرمز إلى القضية « يقسِمُ العددُ 9 العددَ 10^n+1» بالرمز $E(n)$، في حالة $n\in\mathbb{N}$.

① أثبت أنّه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمةٍ للعدد n، كانت عندئذ $E(n+1)$ صحيحة.

② أتكون القضية $E(n)$ صحيحة على $\mathbb{N}$؟ برّرْ إجابتك

الحل: ① لنفترض $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $10^n+1=9k$ عندئذ

$$10^{n+1}+1=10\times10^n+1=10(9k-1)+1=9(10k-1)$$

$10^{n+1}+1$ مضاعف للعدد 9 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة.

② $E(n)$ غير صحيحة لأنّ $E(0)\to10^0+1=2$ غير صحيحة. فهو ليس من مضاعفات 9.

[82] نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n\ge(n+2)^2$ ».

① أتكون القضايا $E(0)$ و $E(1)$ و $E(3)$ و $E(4)$ صحيحة؟

② أثبت أنَّ القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي $n\ge3$.

الحل: ① لنضع القيم في جدول طرفي المتراجحة الواردة في $E(n)$

n	3^n		$(n+2)^2$
1	3	$<$	9
2	9	$<$	16
3	27	$\ge$	25
4	81	$\ge$	36

ومنه $n=3$ هو أول عدد طبيعي تكون عنده $E(n)$ محققة.

② $E(n)\to$ «$3^n\ge(n+2)^2$»، $E(n+1)\to$ «$3^{n+1}\ge(n+3)^2$» أن $E(3)$ صحيحة. لنفترض ومنه أن $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد $n\ge3$. ولنثبت $E(n+1)$ عندئذ

$$3^{n+1}=3\times3^n\ge3\times(n+2)^2\ge(n+3)^2$$

لأنّ $3(n+2)^2-(n+3)^2=2n^2+6n+3>0$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة. أي $E(n)$ صحيحة حيث $n\ge3$.

[83] ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_n=\left(-\frac{1}{n}\right)^n$

الحل: لدينا $u_n=\left(-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{(-1)^n}{n^n}$ ونعلم أن $(-1)^n$ متتالية متناوبة غير مطردة وعند قسمتها على n^n تبقى غير مطردة.

[84] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n=\frac{1}{n!}$.

ⓐ احسب الحدود الستة الأولى منها.

ⓑ تيقن أن $0<u_n\le\frac{1}{n}$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل: ⓐ

n	1	2	3	4	5	6
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$

ⓑ من الواضح $n! \ge n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \ge n$ في حالة $n \ge 2$.

وهذا يقتضي أن يكون $0 < u_n = \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n}$ في حالة $n \ge 1$.

ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ومنه مبرهنة الإحاطة مثلاً.

[85] $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = \left(\frac{n}{10}-1\right)^n$. أثبت أن جميع حدودها، بدءاً من الحد u_{31}، تحقق $u_n \ge 2^n$. استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل: في حالة $n \ge 31$ يكون $\frac{n}{10} - 1 \ge \frac{31}{10} - 1 = 2.1 > 2$، ومن ثمّ $u_n > 2^n$. ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ لأنّ

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

[86] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \ge 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

ⓐ أثبت أنّ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$، أيّاً يكن $n \ge 1$.

ⓑ استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$. ما نهايتها؟

الحل: ⓐ u_n مجموع n حداً أصغرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ وأكبرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$$n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

ⓑ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$

ومن مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

[87] جد نهاية كلٍ من $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ و $(w_n)_{n\ge1}$ و $(t_n)_{n\ge1}$ المعرّفة وفق: $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1},\quad y_n = x_n\sqrt{n},\quad w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}},\quad t_n = \frac{y_n}{w_n}$

الحل: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{w_n} = -\infty$

و $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = -\infty$.

[88] ف

[89] بيّن أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ الآتيتين متجاورتان

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} \quad \text{و}$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

الحل:

$$y_n - x_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \le 0$$

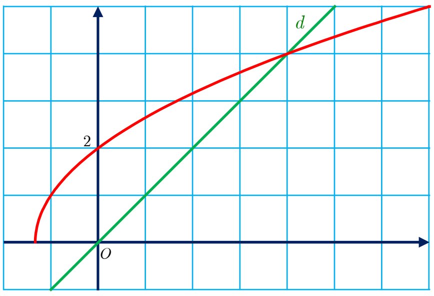
$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}+n} \ge 0$$

ومنه $(y_n)_{n\ge1}$ متناقصة و $(x_n)_{n\ge1}$ متزايدة و $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$

فالمتتاليتان متجاورتان.

[90] $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0 = 6$ و $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$ والخط C للتابع f المعرف على $\left]-\frac{4}{3}, +\infty\right[$ وفق $f(x) = \sqrt{4+3x}$.



والمستقيم d الذي المعادلة $y = x$.

ⓐ ما إحداثيا نقطة تقاطع الخط C والمستقيم d؟

ⓑ أثبت أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى

ⓔ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة وأوجد نهايتها.

الحل: ⓐ من الرسم نجد $(4,4)$.

ⓑ لنضع $E(n) \to 4 \le u_{n+1} \le u_n$.

• من الفرض $u_0 = 6$ و $u_1 = f(6) = \sqrt{22} \in [4,6]$ لأنّ $16 \le 22 \le 36$. فالخاصة $E(0)$ صحيحة.

• لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $4 \le u_{n+1} \le u_n$.

نستنتج من كون التابع f متزايداً أن $f(4) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n)$ أو $4 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$ فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة.

ⓔ نستنتج أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 4. فهي متقاربة من العدد ℓ الذي هو حل المعادلة $f(x) = x$ ومنه $\ell = 4$. أي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$. حيث التابع f مستمر عند $\ell = 4$

[91] نُعطى عددين a و b ونفترض أنّ $a \ne 1$. نتأمل $(v_n)_{n\ge0}$ التي تحقق $v_{n+1} = av_n + b$، أياً كان العدد الطبيعي n.

① عيّن تابعاً f يحقق $v_{n+1} = f(v_n)$ أياً كانت قيمة $n \ge 0$.

② احسب ℓ حلّ المعادلة $f(x) = x$.

③ نعرّف $(u_n)_{n\ge0}$ حيث $u_n = v_n - \ell$. أثبت أنّ $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية، واستنتج u_n بدلالة n و a و b و v_0. ثمّ استنتج v_n.

الحل: ① التابع f هو $x \mapsto f(x) = ax + b$

② حل المعادلة $f(x) = x$ هو $x = ax + b$

تكافئ: $x(1-a) = b$ ومنه: $x = \frac{b}{1-a}$ حل وحيد ومنه $\ell = \frac{b}{1-a}$

③ لدينا $u_n = v_n - \ell$ لذلك $u_{n+1} = v_{n+1} - \ell = av_n + b - \ell$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{v_{n+1}-\ell}{u_n}=\frac{av_n+b-\ell}{u_n}=\frac{av_n+\ell(1-a)-\ell}{v_n-\ell}$$

$$=\frac{av_n+\ell-\ell a-\ell}{v_n-\ell}=\frac{av_n-\ell a}{v_n-\ell}=a$$

وبالتالي: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=a$ ثابت ومنه u_n متتالية هندسية أساسها $q=a$

$$u_n=u_0q^n=(v_0-\ell)a^n=(v_0-\frac{b}{1-a})a^n$$

$$u_n=v_n-\ell\Rightarrow v_n=u_n-\ell\Rightarrow$$

$$v_n=(v_0-\frac{b}{1-a})a^n-\frac{b}{1-a}$$

[92] في حالة عدد طبيعي $n\geq 1$، $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② اكتب $u_{2n}-u_n$ واستنتج أنَّ $u_{2n}-u_n\geq\frac{1}{2}$.

③ أثبت أنَّ $u_{2^n}\geq\frac{n}{2}$، أيّاً يكن العدد الطبيعي n غير المعدوم.

④ هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية حقيقية؟

الحل: ① $u_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=u_n+\frac{1}{n+1}$

وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② $$u_{2n}-u_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$\geq\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}=n\times\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

③ لتكن $E(n)$ الخاصة $u_{2^n}\geq\frac{n}{2}$ في حالة $n\geq 1$. الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $u_{2^1}=1+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$.

لنفرض صحة الخاصة $E(n)$. ونثبت الخاصة $E(n+1)$ صحيحة.

$$u_{2^{n+1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\geq\frac{n}{2}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\geq\frac{n}{2}+\frac{1}{2^n+2^n}+\frac{1}{2^n+2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n}$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة. ومنه $u_{2^n}\geq\frac{n}{2}$

④ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{2}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}u_{2^n}=+\infty$. فليس للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية.

[93] نتأمّل $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق $u_0=a$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n^2+n$

① عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية P تُحقّق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي $t_n=P(n)$ العلاقة التدريجية أي $t_{n+1}=\frac{1}{2}t_n+n^2+n$

② أثبت أنَّ $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=u_n-t_n$ هي متتالية هندسية.

③ اكتب عبارة v_n ثمَّ u_n بدلالة n و a.

الحل: ① نبحث عن كثير حدود من الدرجة الثانية P. لنكتبه بالصيغة $P(n)=an^2+bn+c$. لتعيين الأمثال a و b و c لدينا المتتالية $t_n=P(n)$ تحقق العلاقة (*) $t_{n+1}=\frac{1}{2}t_n+n^2+n$.

بتعويض $t_n=P(n)=an^2+bn+c$

و $t_{n+1}=P(n+1)=a(n+1)^2+b(n+1)+c$ في (*):

$$a(n+1)^2+b(n+1)+c=\frac{1}{2}(an^2+bn+c)+n^2+n$$

$$n^2a+2na+a+nb+b+c=\frac{1}{2}(an^2+bn+c)+n^2+n$$

$$n^2a+2na+a+nb+b+c=\frac{1}{2}an^2+\frac{1}{2}bn+\frac{1}{2}c+n^2+n$$

$$n^2a+2na+a+nb+b+c-\frac{1}{2}an^2-\frac{1}{2}bn-\frac{1}{2}c-n^2-n=0$$

$$(\frac{1}{2}a-1)n^2+(2a+\frac{1}{2}b-1)n+a+b+\frac{1}{2}c=0$$

هذه العلاقة صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n. لذلك نستنتج جملة المعادلات $\frac{a}{2}-1=0\ ,\ 2a+\frac{b}{2}-1=0,\ \ a+b+\frac{c}{2}=0$

فتكون المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هي $t_n=2n^2-6n+8$ والتي تحقق (*).

② هنا لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n^2+n,\quad t_{n+1}=\frac{1}{2}t_n+n^2+n$

و $v_n=u_n-t_n$

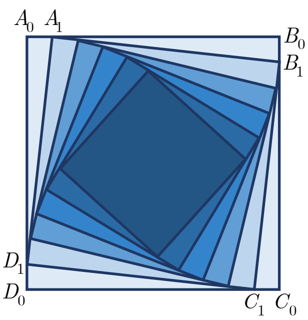
$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-t_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}(u_n-t_n)}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}v_n}{v_n}=\frac{1}{2}$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و $v_0=a-8$ و

$$v_n=(a-8)\frac{1}{2^n}=\frac{a-8}{2^n}$$

③ $u_n-t_n=\frac{s-8}{2^n}$ ومنه $u_n=(s-8)2^{-n}+2n^2-6n+8$.

[94] S_0 هو المربع $A_0B_0C_0D_0$ الذي طول ضلعه 10، S_1 المربع $A_1B_1C_1D_1$ الذي تقع رؤوسه على أضلاع S_0 حيث $A_0A_1=1$. بالطريقة التي رسمنا فيها S_1



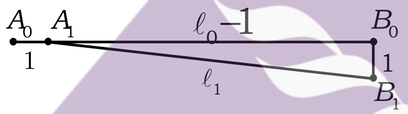
انطلاقاً من S_0، نرسم S_2 انطلاقاً من S_1. نرمز إلى طول ضلع المربع S_n بالرمز ℓ_n.

عبر عن المتتالية $(\ell_n)_{n\geq0}$ بدلالة n وعين نهايتها.

الحل: نثبت صحة العلاقة $1<\ell_{n+1}<\ell_n$ بالاستقراء الرياضي

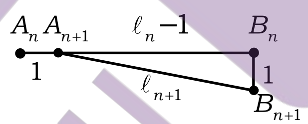
$$E(n)\quad \to \{1<\ell_{n+1}<\ell_n\}$$
$$E(n+1)\to \{1<\ell_{n+2}<\ell_{n+1}\}$$
$$E(0)\quad \to \{1<\ell_1<\ell_0\}$$

- العلاقة $E(0)$ صحيحة



لأنه من الشكل المجاور الضلع القائمة B_0B_1 اصغر من الوتر A_1B_1 أي $1<\ell_1$ وطول أي ضلع أصغر تماماً من مجموع طولي الضلعين الأخريين لذلك $A_1B_1<A_1B_0+B_0B_1$ أي $\ell_1<\ell_0-1+1=\ell_0$

- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ ونثبت صحة العلاقة $E(n+1)$



العلاقة $E(n+1)$ صحيحة لأن من الشكل المجاور الضلع القائمة B_nB_{n+1} اصغر من الوتر $A_{n+1}B_{n+1}$ أي $\ell_{n+1}>1$ وكذلك طول أي ضلع أصغر تماماً من مجموع طولي الضلعين الأخريين لذلك

$$A_{n+1}B_{n+1}<A_{n+1}B_n+B_nB_{n+1}$$

أي $\ell_{n+1}<\ell_n-1+1=\ell_n$ ومنه $1<\ell_{n+1}<\ell_n$ صحيحة المتتالية $(\ell_n)_{n\geq0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 1 فهي متقاربة. ولتكن نهايتها العدد ℓ.

وبحسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم $A_{n+1}B_{n+1}B_n$ يكون

$$\ell_{n+1}=\sqrt{1+(\ell_n-1)^2}$$

نفترض التابع $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}$ والمتتالية $(\ell_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالتدريج بالشرط $\ell_0=10$ والعلاقة $\ell_{n+1}=f(\ell_n)$. ولدينا f مستمر عندما $x>1$ والمتتالية $(\ell_n)_{n\geq0}$ متقاربة يكون العدد ℓ هو حل للمعادلة $f(x)=x$. أي

$$\sqrt{(x-1)^2+1}=x\Rightarrow(x-1)^2+1=x^2$$
$$x^2-2x+1+1=x^2\Rightarrow -2x=-2\Rightarrow x=1$$

ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}\ell_n=1$.

[95] ليكن a و b عددين يحققان $a>b>0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق $u_n=\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$. ادرس تقارب هذه المتتالية.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n(1-\frac{b^n}{a^n})}{a^n(1-\frac{b^n}{a^n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{b^n}{a^n}}{1-\frac{b^n}{a^n}}=1$$

[96] ليكن a و b عددين يُحقّقان $0<a<b$. ولنتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق $x_0=a$ و $y_0=b$ وعند كل عدد طبيعي n:

$$x_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}\quad \text{و} \quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$

ⓐ أثبت أن $x_n\cdot y_n$ ثابتة وأن $x_n>0$ و $y_n>0$

ⓑ ادرس اطراد كل من $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$

ⓒ أثبت أن $y_n-x_n\leq\dfrac{y_0-x_0}{2^n}$

ⓓ أثبت أن المتتاليتان $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان وهما تتقاربان من النهاية ℓ جدها.

الحل: ⓐ لدينا $x_{n+1}\cdot y_{n+1}=\dfrac{2x_ny_n}{x_n+y_n}\cdot\dfrac{x_n+y_n}{2}=x_n\cdot y_n$

ومنه المتتالية $(x_ny_n)_{n\geq0}$ ثابتة وحدها الأول يساوي ab

نلاحظ أن $x_n>0$ و $y_n>0$ أياً كانت n. ولنثبتها بالاستقراء الرياضي

$$E(n)\quad \to \{y_n>0,\ x_n>0\}$$
$$E(n+1)\to \{y_{n+1}>0,\ x_{n+1}>0\}$$
$$E(0)\quad \to \{y_0>0,\ x_0>0\}$$

- إن $E(0)$ صحيحة لأن $x_0=a>0$ و $y_0=b>0$.
- نفرض صحة العلاقة $E(n)$ ونثبت صحة العلاقة $E(n+1)$

كل من x_n+y_n و x_ny_n موجباً تماماً وكذلك كل من $x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ و $y_{n+1}=\dfrac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$.

ومنه الخاصة $E(n+1)$ صحيحة. ومنه يكون $x_n>0$ و $y_n>0$ أياً كانت n.

ⓑ نختار $a=1$ و $b=3$.

نخمن أن $(x_n)_{n\geq0}$ متزايدة و $(y_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

n	0	1	2
x_n	1	1.5	1.71
y_n	3	2.0	1.75

$$y_{n+1}-y_n=\frac{x_n+y_n}{2}-y_n=\frac{x_n-y_n}{2} \quad (1)$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}-x_n=\frac{x_ny_n-x_n^2}{x_n+y_n}$$

$$=\frac{x_n}{x_n+y_n}(y_n-x_n) \quad (2)$$

$$y_{n+1}-x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}-\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$$

$$=\frac{(x_n+y_n)^2-4x_ny_n}{2(x_n+y_n)}=\frac{(x_n-y_n)^2}{2(x_n+y_n)}\ge 0$$

ومنه يكون $y_n-x_n\ge 0$. ومن (2) و (1) تكون المتتالية $(x_n)_{n\ge0}$ متزايدة والمتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ متناقصة.

ⓒ أي $x_n\le x_{n+1}\le y_{n+1}\le y_n$. ومنه

$$y_{n+1}-x_{n+1}\le y_{n+1}-x_n=\frac{y_n+x_n}{2}-x_n=\frac{1}{2}(y_n-x_n)$$

نخمن أن $E(n)\to y_n-x_n\le\frac{y_0-x_0}{2^n}$ لنثبت ذلك بالاستقراء

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن $2^0=1$. نفرض صحة العلاقة $E(n)$ ونثبت صحة العلاقة $E(n+1)$

$$y_{n+1}-x_{n+1}\le\frac{1}{2}(y_n-x_n)\le\frac{1}{2}\left(\frac{y_0-x_0}{2^n}\right)=\frac{y_0-x_0}{2^{n+1}}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

ⓓ ومنه $0\le y_n-x_n\le\frac{b-a}{2^n}$ ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\ge0}$ و $(y_n)_{n\ge0}$ متجاورتان وهما تتقاربان من النهاية ℓ.

ولكن $x_ny_n=ab$ مهما كانت قيمة n عندما n تسعى إلى اللانهاية يكون $\ell^2=ab$ ولكن العدد ℓ موجب لأنه يحقق $a=x_0\le\ell\le y_0=b$. ومنه $\ell=\sqrt{ab}$.

[97] يوجد: $(u_n)_{n\ge0}$ عدد $\ell>0$ يحقق $0\le u_{n+1}-\ell\le\frac{2}{3}(u_n-\ell)$. أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة إلى ℓ.

الحل: لتكن الخاصة $E(n)$ $0\le u_n-\ell\le\left(\frac{2}{3}\right)^n(u_0-\ell)$.

باختيار $n=0$ في الفرض $0\le u_{n+1}-\ell\le\frac{2}{3}(u_n-\ell)$ نستنتج أن $0\le u_0-\ell$

ومن ثم تكون المتراجحة $0\le u_0-\ell\le\left(\frac{2}{3}\right)^0(u_0-\ell)$ محققة ومنه $E(0)$ محققة. نفترض أن $E(n)$ صحيحة.

$$0\le u_{n+1}-\ell\le\frac{2}{3}(u_n-\ell)\le\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n(u_0-\ell)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}(u_0-\ell)$$

$E(n+1)$ صحيحة أيضاً. ومنه $E(n)$ صحيحة.

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ لأن $-1\le\frac{2}{3}<1$ وحسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-\ell)=0$ أي $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\ell$.

[98] يرمز x إلى عدد حقيقي حيث $n>0$

$$S_n=\cos x+\cos(3x)+\cos(5x)+\cdots+\cos((2n-1)x)$$

① أثبت أنَّ: $\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

و $\sin(2a)=2\sin a\cos a$

② حوِّل العبارتين الآتيتين من جداء إلى مجموع

$\sin x\cdot\cos((2n+1)x)$ و $\sin nx\cdot\cos nx$

③ أثبت أنَّ $S_n=\cos(nx)\times\frac{\sin(nx)}{\sin x}$، أياً يكن $n\ge1$.

الحل: ① لدينا

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

بالجمع نجد $2\sin a\cdot\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

ومنه $\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

نختار $b=a$ نجد العلاقة الثانية:

$$\sin(a+a)=\sin a\cos a+\cos a\sin a$$
$$\sin(2a)=2\sin a\cos a$$

② نفرض $a=x, b=(2n+1)x$ في العلاقة

$\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$ نجد

$$\sin x\cdot\cos((2n+1)x)=\frac{1}{2}(\sin 2(n+1)x+\sin(-2nx))$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 2(n+1)x-\sin 2nx)$$

فيكون $2\sin x\cdot\cos((2n+1)x)=\sin 2(n+1)x-\sin 2nx$

وباختيار $a=nx$ في العلاقة $\sin(2a)=2\sin a\cos a$ نجد

$$\sin 2nx=2\sin nx\cdot\cos nx$$

③ لنرمز إلى الخاصة $E(n)$

$$E(n)\to\boxed{\begin{aligned}S_n&=\cos x+\cos(3x)+\cos(5x)+\cdots\\&+\cos((2n-1)x)=\cos(nx)\times\frac{\sin(nx)}{\sin x}\end{aligned}}$$

$$E(n+1)\to \boxed{\begin{aligned}S_{n+1}&=\cos x+\cos(3x)+\cos(5x)+\cdots\\&+\cos((2n+1)x)=\cos((n+1)x)\times\frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}\end{aligned}}$$

إن $E(1)$ محققة لأن $S_1=\cos x=\cos x\times\dfrac{\sin x}{\sin x}$.

لنفترض أن $E(n)$ محققة ولنثبت $E(n+1)$ عندئذ

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=\cos x+\cos(3x)+\cos(5x)+\\&\cdots+\cos((2n-1)x)+\cos((2n+1)x)\\&=S_n+\cos((2n+1)x)\\&=\cos nx\times\frac{\sin nx}{\sin x}+\cos((2n+1)x)\\&=\frac{2\cos nx\times\sin nx}{2\sin x}+\cos((2n+1)x)\\&=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}+\cos((2n+1)x)\\&=\frac{\sin 2nx+2\sin x\cos((2n+1)x)}{2\sin x}\\&=\frac{\sin 2nx+\sin 2(n+1)x-\sin 2nx}{2\sin x}\\&=\frac{\sin 2(n+1)x}{2\sin x}=\frac{2\cos(n+1)x\cdot\sin(n+1)x}{2\sin x}\\&=\cos(n+1)x\cdot\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}\end{aligned}$$

ومنه الخاصة $E(n+1)$ صحيحة. ومنه صحة $E(n)$

[99] مستوٍ $\mathcal{P}$، محدَّث بمعلم متجانس، $\mathcal{H}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2-5y^2=1$. ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي $\mathcal{P}$ النقطة $M'(9x+20y,4x+9y)$، أي $f(M)=M'$. لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(1,0)$، ثمّ لنتأمّل في المستوي $\mathcal{P}$ متتالية النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $S_{n+1}=f(S_n)$. أثبت أنَّ S_n نقطة من المجموعة $\mathcal{H}$ وأنّ إحداثياتها أعداد صحيحة.

الحل: لنثبت بالتدريج أن جميع النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ تقع على H ومركبات كل منها أعداد صحيحة.

- " النقطة S_n تنتمي إلى H ومركبتا S_n أعداد صحيحة" $E(n)\to$
- " النقطة S_{n+1} من H ومركبتا S_{n+1} أعداد صحيحة" $E(n+1)\to$
- إن $E(0)$ محققة لأن $S_0=(1,0)$ مركبتاها عددان صحيحان وهما تحققان معادلة H.

لنفترض أن $E(n)$ محققة أي أن $S_n(x,y)$ تنتمي إلى H ومركبتاها x و y عددان صحيحان.

$x'=9x+20y$ و $y'=4x+9y$

نعوض في المعادلة نلاحظ أن

$$\begin{aligned}x'^2-5y'^2&=1\\(9x+20y)^2-5(4x+9y)^2&=1\\x^2-5y^2&=1\end{aligned}$$

ومنه إذا انتمت M إلى H انتمت صورتها $M'=f(M)$ إلى H.

أيضاً إذا كان كل من x و y عدداً صحيحاً كان كل من x' و y'.

النقطة $S_{n+1}(x',y')=f(S_n)$ تحقق معادلة H فهي تنتمي إليها ومركبتاها x' و y' عددان صحيحان.

ومنه الخاصة $E(n+1)$ صحيحة. فتكون صحة الخاصة المطلوبة.

[100] ما العبارات الصحيحة وما العبارات غير الصحيحة فيما يأتي؟

① إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية، عندئذ ليس للمتتالية $(u_n+v_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

صحيح. لأن $v_n=(v_n+u_n)-u_n$ نفترض أنه كان لدينا $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\ell\in\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\ell'\in\mathbb{R}$

ومنه نجد أن $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\ell'-\ell\in\mathbb{R}$ وهذا تناقض.

② إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية

عندئذ ليس للمتتالية $(u_nv_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

خطأ. مثلاً $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n=\frac{1}{n+1}$ التي تحقق $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0=\ell\in\mathbb{R}$ وخذ $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=(-1)^n$.

ليس للمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ نهاية ومع ذلك $\lim\limits_{n\to\infty}(u_nv_n)=0$.

③ إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\cdot v_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ كان $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

صح لأن $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((v_nu_n)\times\dfrac{1}{u_n}\right)=\ell\times 0=0$.

④ إذا كان لمتتالية عنصرٌ قاصر عنها، كان لها عنصرٌ راجح عليها.

خطأ. مثلاً $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n=n$. الصفر عنصر قاصر وليس لهذه المتتالية عنصر راجح.

التابع اللوغاريتمي

1. التابع اللوغاريتمي النيبري أو الطبيعي:

- هو تابع يحول الجداء إلى مجموع ونرمز له $\ln$ حيث
$$f:]0,\infty[\to\mathbb{R}:\ f(x)=\ln x$$
- هو تابع معرف على $]0,+\infty[$ يحقق:
$\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$ و $\ln 1=0$
- هو تابع اشتقاقي ومتزايدٌ تماماً على $]0,+\infty[$

مثال1: عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

- المقدار $\ln((x-1)(2-x))$ معرف على $D=]1,2[$.
- المقدار $\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ معرف على $D=]0,1[$.
- المقدار $\ln\left|x^2+2x\right|$ معرف عندما $x^2+2x\neq 0$ أي $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$

[1] عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

(1) $\ln(1+x)$ (2) $\ln(-x-3)$ (3) $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

(4) $\dfrac{1}{\ln x}$ (5) $\ln(x^2-3x+2)$ (6) $\ln(x^2+4x)$

(7) $\ln(x^2)$ (8) $\ln|x+1|$ (9) $\ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$

الحل:

2. خواص التابع اللوغاريتمي: أياً يكن $a>0$ و $b>0$:

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$	$\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$	
$\ln 1=0$	$\ln a^n=n\ln a$	دبل كيك

مثال2: بسِّط كلاً من العبارات الآتية، علماً أنّ x عدد حقيقي.

- $A=\ln\dfrac{2}{3}+\ln\dfrac{3}{2}=\ln\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{2}\right)=\ln 1=0$.
- $B=\ln 8-\ln 2=\ln\dfrac{8}{2}=\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$.
- $C=\ln\dfrac{16}{25}-\ln 16=\ln 16-\ln 25-\ln 16=-2\ln 5$

[2] بسِّط كتابة الأعداد الآتية:

ⓐ $a=\ln 3+\ln\frac{1}{3}$ ⓑ $b=\ln\frac{1}{16}$ ⓒ $c=2\ln\sqrt{2}$

ⓓ $d=\ln 50$ ⓔ $e=\ln\frac{16}{25}$ ⓕ $f=\ln 250$

ⓖ $g=\ln 81+\ln\frac{1}{27}-\ln 72-\ln\frac{7}{8}$

ⓗ $h=\ln\sqrt{75}-\ln 15-\ln\sqrt{27}$

الحل:

[3] أثبت أنَّ $\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})=0$.

الحل:

[4] قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

ⓐ $y=\ln 2+\ln 3$, $x=\ln 5$

ⓑ $y=3\ln 2$, $x=2\ln 3$

الحل:

سما الصيد التعليمية

3. حل المعادلات

الخطوات:

- نوجد شرط الحل E
- نوجد حلول المعادلة ثم ندرس انتماء الحلول إلى شرط الحل.

ملاحظة: لحل المعادلة $\ln a = \ln b$ نكتفي بشرط طرف واحد.

نراعي القاعدة $\ln(a) = \ln(b) \quad \Leftrightarrow \quad a = b$

مثال3: حل المعادلات الآتية:

ⓐ $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$.

نكتفي بشرط الطرف الاول $E =]\frac{4}{3}, +\infty[$.

$$\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$$
$$3x-4 = x^2-4$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x_1 = 0 \notin E, \quad x_2 = 3 \in E_g$$

الحل هو $S = \{3\}$.

ⓑ $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

شرط الحل:

$2x-3>0$ و $6-x>0$ و $x>0$ ومنه $E =]\frac{3}{2}, 6[$.

$$\frac{1}{2}\ln(2x-3) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$$
$$\ln(2x-3) = 2\ln(6-x) - \ln x$$
$$\ln(2x-3) + \ln x = \ln(6-x)^2$$
$$\ln(2x^2-3x) = \ln(6-x)^2$$
$$2x^2-3x = (6-x)^2$$
$$x^2+9x-36 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-3) = 0$$
$$x_1 = -12 \notin D, x_2 = 3 \in D \Rightarrow S = \{3\}$$

ملاحظة: نفترض أن حل المعادلة $\ln(x) = 1$ هو العدد $x = e$

أي $\ln e = 1$

نضرب الطرفي بالعدد حقيقي m نجد $m\ln e = m$.

ومنه $\ln(e^m) = m$

أ حل المعادلة $\ln x = m$ هو $x = e^m$

حيث **العدد النيبري** e يساوي تقريباً 2.7182818284590.

[5] حلّ المعادلات الآتية:

ⓐ $\ln(x+11) = \ln(2x+3)$ ⓑ $\ln(x+1) = \ln(x^2-1)$

ⓒ $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$ ⓓ $2\ln x = \ln(2x^2+8x)$

ⓔ $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$ ⓕ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

ⓖ $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$ ⓗ $\ln(1-x) = -2$

ⓘ $\ln(x-2) = 2 + \ln(x+1)$ ⓙ $(\ln x)^2 = 16$

الحل:

سما المجد التعليمية

4. حل المتراجحات

الخطوات:

- نوجد شرط الحل E
- نوجد حلول المتراجحة ثم نقاطع الحلول مع شرط الحل.

ملاحظة: لحل المتراجحة $\ln g(x) < \ln h(x)$ نكتفي بشرط الطرف الاصغر. ونراعي القاعدة $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

مثال4: حل المتراجحات الآتية:

ⓐ $\ln(x^2-4) \le \ln(-3x)$.

نكتفي بشرط الطرف الأصغر أي $x^2-4>0$

ومنه $(x-2)(x+2)>0$ أي $E =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$$\ln(x^2-4) \le \ln(-3x)$$
$$x^2-4 \le -3x$$
$$(x+4)(x-1) \le 0 \Rightarrow x \in [-4,1]$$

مجموعة حلول المتراجحة هي $S = [-4,-2[$

ⓑ $\ln 3 \le \ln(5-x) + \ln(x-1)$ المتراجحة معرفة في حالة $x<5$ و $x>1$، ومنه شرط $E =]1,5[$.

ومنه $\ln 3 \le [\ln(5-x)(x-1)]$

ومنه $\ln 3 \le \ln(-x^2+6x-5)$ $(x-2)(x-4) \le 0$

حلول المتراجحة هي $[2,4]$

ⓒ $(\ln x+2)(\ln x-3) \le 0$ شرط الحل $]0,+\infty[$

وينعدم الطرف الأول عند $x=e^{-2}, x=e^{3}$

x	$-\infty$		e^{-2}		e^{3}		$+\infty$
$(\ln x+2)(\ln x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

حلول المتراجحة هي $[e^{-2},e^{3}]$.

ⓓ $0.2 \ge \left(\frac{2}{5}\right)^n$ تكافئ $\ln(0.2) \ge n\ln(0.4)$ ولكن $\ln(0.4)<0$

ومنه $n \ge \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.4)} = \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} \approx 1.76$. ومنه $n \ge 2$.

ⓔ $(1+\frac{3}{100})^n \ge 2$ تكافئ $n \times \ln(1+\frac{3}{100}) \ge \ln 2$ وهي تكافئ $n \ge \frac{\ln 2}{\ln(1.03)} \approx 23.45$، فمجموعة قيم n هي $n \ge 24$.

[6] حل كلّ متراجحة فيما يأتي:

ⓐ $\ln(x-2) \le \ln(2x-1)$ ⓑ $\ln(3-x) \le \ln x + \ln(x+1)$

ⓒ $\ln x \le \ln(x^2-2x)$ ⓓ $\ln(6x+4) \le \ln(3x^2-x-2)$

ⓔ $\ln(x+1) \ge \ln(x^2-1)$ ⓕ $\ln(3x^2-x) \le \ln x + \ln 2$

ⓖ $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \ge \ln x$ ⓗ $3\ln x > \ln(3x-2)$

الحل:

سما المجد التعليمية

سما المجد التعليمية

[7] حل كلاً من المعادلة والمتراجحة المعطاة

ⓐ $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$ ، و $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$.

الحل:

[8] جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

ⓐ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$

ⓑ $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x - 5\ln y = 4 \end{cases}$

ⓒ $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$

الحل:

سما المجد التعليمية

[9] كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة جذران مختلفان؟

$$x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$$

الحل:

مثال5: حل كلاً من المعادلات الآتية:

① $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

② $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

③ $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

الحل:

① $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

شرط الحل $E = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$.

وهي تكافئ $|x-2||x+2| = 1$ أو $|x^2-4| = 1$.

فإما أن يكون $x^2 = 5$ أو يكون $x^2 = 3$.

ومنه مجموعة حلول المعادلة $S = \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$

② $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

شرط الحل $E =]-4,2[\cup]2,+\infty[$.

$|x-2|(x+4) = 8$

فإما أن يكون $x > 2$ و $x^2 + 2x - 16 = 0$

ومنه $x = \sqrt{17} - 1$ (الجذر الآخر مرفوض).

أو يكون $x < 2$ و $x^2 + 2x = 0$

ومنه $x=0$ و $x=-2$.

مجموعة الحلول هي $\left\{-2,0,\sqrt{17}-1\right\}$.

③ $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$ شرط الحل $E=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2},0,1\}$.

وهي تكافئ $\left|2x^2+x-3\right|=x^2$

إما $x^2+x-3=0$

ومنه $x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

أو $3x^2+x-3=0$

ومنه $x=\frac{-1-\sqrt{37}}{6}, x=\frac{-1+\sqrt{37}}{6}$.

مجموعة الحلول هي

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6},\frac{-1-\sqrt{37}}{6},\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

5. نهاية التابع اللوغاريتمي:

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$

$\ln 1=0$ ، $\ln\ ]1,+\infty[\ >0$ ، $\ln x\in\mathbb{R}$

$\ln(0^+)=-\infty$ ، $\ln\ ]0,1[\ <0$ ، $D_{\ln}=]0,+\infty[$

$\ln(+\infty)=+\infty$ ، $\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$ ، $\frac{+\infty}{0^-}=-\infty$

قواعد النهايات

$\boxed{\ln(1)}\rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$

$\boxed{\ln(\infty)}\rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

$\boxed{\ln(0)}\rightarrow \lim_{x\to0}x\ln x=0$

في حالات عدم التعيين غالباً نتبع

حالة $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ و $+\infty-\infty$: عامل مشترك أو قواعد

حالة $0\times(\pm\infty)$: نشر أو قواعد

حالة $\frac{0}{0}$: قواعد

مثال6: احسب كلاً من نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$:

ⓐ $f(x)=x^2-3\ln x$ $\quad a=+\infty$

نكتب $f(x)=x^2\left(1-3\times\frac{\ln x}{x^2}\right)=f(x)=x^2\left(1-\frac{3}{x}\times\frac{\ln x}{x}\right)$.

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

و $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3\ln x}{x^2}\right)=1$.

ⓑ $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ $\quad a=0$

نكتب $f(x)=\frac{1+x\ln x}{x}$ ومنه $\lim_{x\to0}f(x)=+\infty$

لأنّ $\lim_{x\to0}(x\ln x)=0$ والمقام يسعى إلى الصفر بقيم موجبة.

ⓒ $f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x+2)$ $\quad a=+\infty$

$f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln 2$

لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}=2$.

ⓓ $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ $\quad a=+\infty$

نكتب $f(x)=\frac{x(1+\frac{\ln x}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}=\frac{1+\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

[10] جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه.

ⓐ $f(x)=x-\ln x$ ⓑ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ⓒ $f(x)=(x^2-x)\ln x$ ⓓ $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

ⓔ $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ⓕ $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

ⓖ $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ ⓗ $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$

ⓘ $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x-1)$ ⓙ $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

ⓚ $f(x)=x(1-\ln x)$ ⓛ $f(x)=x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

ⓜ $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ ⓝ $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$

الحل:

6. اشتقاق التابع الأسي واللوغاريتمي:

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- عندما يكونا لدينا حشوة غير x نضرب بمشتق الحشوة.

مثال 7: احسب $f'(x)$ لكل من التوابع الآتية :

ⓐ $f(x) = x^2 + \ln x$ ومنه $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

ⓑ $f(x) = \ln(x^3+1)$ أي $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+1}$

[11] جد $f'(x)$ لكلٍ من التوابع الآتية:

ⓐ $f(x) = x - \ln x$ ⓒ $f(x) = \ln(x^2+1)$

ⓑ $f(x) = x \ln x$ ⓓ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

ⓔ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$ ⓕ $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$

ⓖ $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ ⓗ $f(x) = (x^2 - x)\ln x$

الحل:

مبرهنة: إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على المجال I وموجباً تماماً على I، كان التابع $x \mapsto \ln\left(u(x)\right)$ اشتقاقياً على I .

[12] أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f' .

ⓐ $f(x) = \ln(1+x^2)$, $\quad I = \mathbb{R}$

ⓑ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, $\quad I =]1,+\infty[$

ⓒ $f(x) = x^2 + \ln(x)$, $\quad I =]0,+\infty[$

الحل:

سيما المجد التعليمية

[13] f المعرف على $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=2x+\ln x$.

ⓐ بيّن أنّ f اشتقاقي على I ، واحسب $f'(x)$

ⓑ اكتب معادلة للمماس للخط للتابع f في النقطة التي فاصلتها

الحل:

[14] نتأمّل التابع f المعرف على $I=[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2(1-\ln x), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$.

احسب $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$. واستنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر

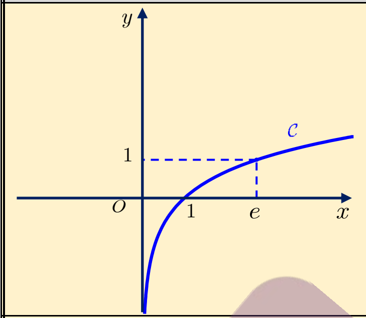
الحل:

سطح المجد التعليمية

7. دراسة التابع اللوغاريتمي

التابع $\ln$ تابع متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$.

التابع $\ln$ مرجعي، يمكن ان نقوم بكتابة خواصها دون اثبات.



قيم تقريبية: $\ln 5 \approx 1.6$ ، $\ln 3 \approx 1.1$ ، $\ln 2 \approx 0.7$ ، $\sqrt{5} \approx 2.2$ ، $\sqrt{3} \approx 1.7$ ، $\sqrt{2} \approx 1.4$

[15] ادرس تغيرات التابع f المعرف وفق $f(x) = \ln x$ وارسم $\mathcal{C}$.

الحل:

....

[16] f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق $f(x) = x+1+2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

ⓐ أثبت $d : y = x+1$ مقارب عند $+\infty$. وادرس الوضع النسبي

ⓑ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.ارسم d ثم الخط البياني C .

الحل:

....

[17] f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x - \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

ⓐ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

ⓑ أثبت $d : y = x - \ln 2$ مقارب عند $+\infty$. وادرس الوضع النسبي

ⓒ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى $]1,2[$.

ⓓ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني C.

الحل:

مثال8: ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$.

ⓐ لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟

ⓑ ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$.

الحل: ⓐ ليكن g التابع المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق

$f(x) - y_d = x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x+1) = -\frac{\ln x}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_d = 0$. فالمستقيم $d : y = x + 1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

ⓑ ندرس إشارة $f(x) - y_d$ ، التي تماثل إشارة $-\ln x$ فنجد

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y_d$	$+$	0	$-$
$\mathcal{C}$	فوق d		تحت d

مثال9: ادرس تغيرات كلٍ منها وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

ⓐ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

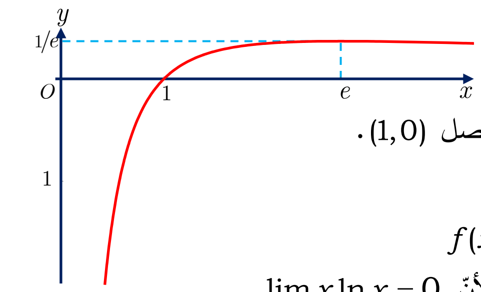
- $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

ومنه المحورين الإحداثيين مقاربان للخط $\mathcal{C}$.

- $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ينعدم f' فقط عند $x = e$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

• نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$.



ⓑ $f(x) = x - x\ln x$

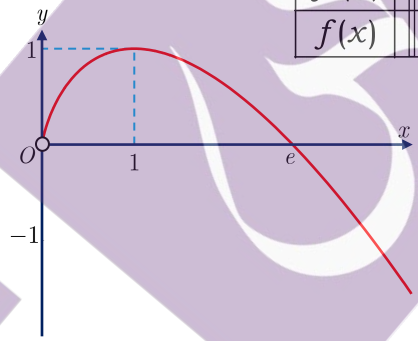
• $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ لأنّ $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.

و $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ لأنّ $f(x) = x(1-\ln x)$

• $f'(x) = -\ln x$ ينعدم f' فقط عند $x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow -\infty$

• نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.



ⓒ $f(x) = x\ln x$ •

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ و

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

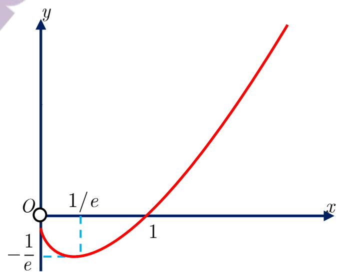
• $f'(x) = \ln x + 1$ ينعدم f' فقط عند $x = 1/e$.

• جدول تغيرات f :

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-1/e$	$\nearrow +\infty$

• نقاط مساعدة :

التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.



ⓓ $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$

• $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ، لأن $\lim_{x\to 0}(1-\ln x) = +\infty$

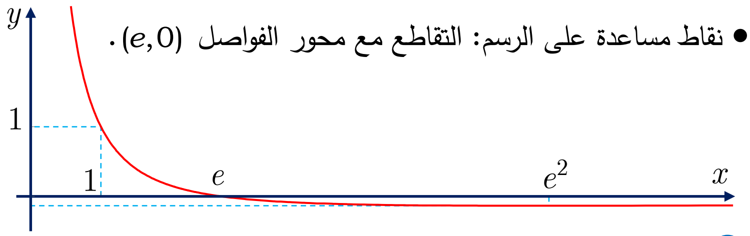
و $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. ومنه محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ لأنّ $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ ومنه محور الفواصل مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

• $f'(x) = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}$. وينعدم f' فقط عند $x = e^2$.

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$-1/e^2$	$\nearrow 0$

• نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$.



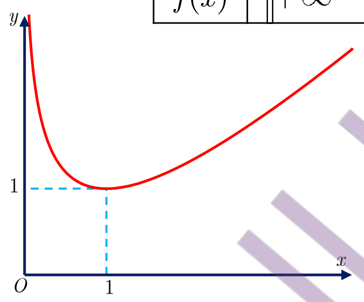
ⓔ $f(x) = x - \ln x$

• $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$. ومنه محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$. وكذلك $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

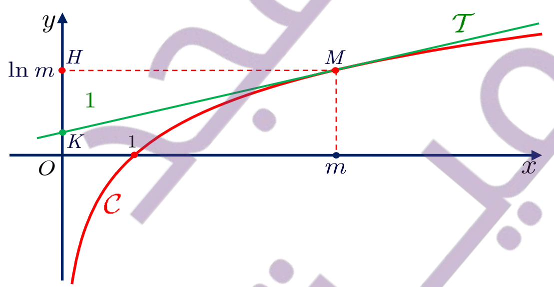
لأنّ $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ و $\lim_{x\to +\infty}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.

• $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ ، وينعدم f' فقط عند $x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$



مثال10: في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، رسمنا $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $\ln$. لتكن M نقطة من $\mathcal{C}$ فاصلتها m .



ⓐ جد، بدلالة m، معادلةً للمماس T للخط $\mathcal{C}$ في النقطة M .

ⓑ لتكن H مسقط M على محور التراتيب ولتكن K نقطة تقاطع المماس T مع هذا المحور. أثبت أنَّ ترتيب النقطة K يساوي $\ln m - 1$، أياً يكن $m > 0$. واستنتج أنَّ $\overrightarrow{KH} = \vec{j}$.

ⓒ استفد مما سبق لإعطاء طريقة عملية وبسيطة لرسم مماس للخط $\mathcal{C}$ من نقطة كيفية منه.

الحل: ⓐ معادلة T هي $y = \underbrace{\ln m}_{f(m)} + \underbrace{\dfrac{1}{m}}_{f'(m)}(x - m)$

ⓑ يقطع $\mathcal{T}$ محور التراتيب في النقطة التي فاصلتها 0 أي $K(0,\ln m-1)$.

لمّا كانت إحداثيتا M هما $(m,\ln m)$ استنتجنا أنَّ $H(0,\ln m)$.

$$\overrightarrow{KH}=\begin{bmatrix}0\\ \ln m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \ln m-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\vec{j}$$

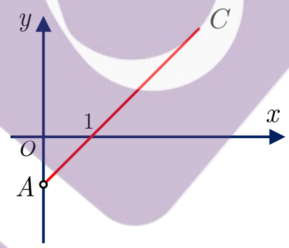
ⓒ لتكن M كيفية من الخط $\mathcal{C}$. ننشئ H المسقط القائم للنقطة M على محور التراتيب، ثُمّ نرسم K صورة H وفق الانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$. فيكون (KM) مماس $\mathcal{C}$ في النقطة M.

مثال11: ارسم في معلم مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحقّقة للشرط.

ⓐ $\ln x=\ln(y+1)$ ⓑ $\ln y=2\ln x$ ⓒ $\ln x+\ln y=0$

الحل

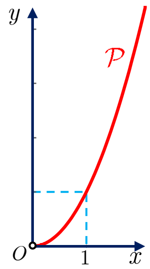
ⓐ العلاقة $\ln x=\ln(y+1)$ معرفة بشرط $x>0$ و $y>-1$ أو $x=y+1$ أو $d: y=x-1$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ هي نصف المستقيم $[AX)$ من d



دون طرفه $A(0,-1)$.

ⓑ العلاقة $\ln y=2\ln x$ معرفة بشرط $x>0$ و $x>0$.

$\ln y=2\ln x$ تكافئ $\ln y=\ln(x^2)$ أو $y=x^2$. والنقاط $M(x,y)$ هي نصف قطع مكافئ معادلته $y=x^2$ مرسوم في الربع



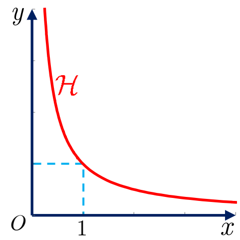
الأول عدا ذروته $O(0,0)$.

ⓒ العلاقة $\ln y+\ln x=0$ معرفة بشرط $x>0$ و $x>0$.

$\ln y+\ln x=0$ هي $\ln y=-\ln x$ تكافئ

$\ln y=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ أي $y=\frac{1}{x}$.

النقاط $M(x,y)$ هي فرع القطع الزائد والمرسوم في الربع الأول.



8. إثبات صحة متراجحة

- لإثبات صحة المتراجحة ننقل جميع الحدود إلى طرف ونسميه $f(x)$ وندرس اطراده.
- حيث دراسة الاطراد مثل التغيرات ولكن من دون نهايات.
- اثبات صحة المتراجحة غير حل المتراجحة في الفقرة 6.

مثال12: أثبت أنَّ $\ln x<2\sqrt{x}$ أياً يكن $x>0$.

الحل: $2\sqrt{x}-\ln x>0$

نعرف f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

التابع f اشتقاقي على I،

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}=\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$$

ينعدم هذا المشتق عند $x=1$ وإشارته تماثل إشارة $x-1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

بالاستعانة بجدول الاطراد نستنتج أنَّ $f(x)\ge 2>0$ أياً يكن $x>0$، أي إنّ $2\sqrt{x}-\ln x>0$، أو $\ln x<2\sqrt{x}$.

[18] أثبت أنَّ $\ln x\le 2(\sqrt{x}-1)$، أياً يكن $x>0$.

الحل:

[19] أثبت أنّ $\ln x \le x-1$، أياً يكن $x>0$.

باختيار $x=e^{1/3}$ و $x=e^{-1/3}$، احصر e.

الحل:

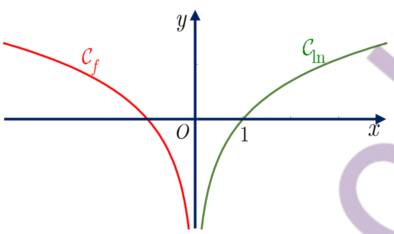
9. استنتاج رسم منحني التابع:

- $f_1(x)=f(-x)$ يكون C_1 نظير C بالنسبة إلى محور التراتيب. أي $(x,y)\to(-x,y)$
- $f_1(x)=-f(x)$ يكون C_1 نظير C بالنسبة إلى محور الفواصل. أي $(x,y)\to(x,-y)$
- $f_1(x)=-f(-x)$ يكون C_1 نظير C بالنسبة إلى المبدأ. أي $(x,y)\to(-x,-y)$
- $f_1(x)=f(x)+b$ يكون C_1 ناتج عن انسحاب C بالمتجه $+b\vec{j}$. أي $(x,y)\to(x,y+b)$
- $f_1(x)=f(x+a)$ يكون C_1 ناتج عن انسحاب C بالمتجه $-a\vec{i}$. أي $(x,y)\to(x-a,y)$
- $f_1(x)=|f(x)|$ تبقى النقاط ذات التراتيب الموجبة كما هي والنقاط ذات التراتيب السالبة نأخذ بدلاً عنها نظائرها بالنسبة إلى محور الفواصل
- $f_1(x)=f(|x|)$ تبقى النقاط ذات الفواصل الموجبة كما هي والنقاط ذات الفواصل السالبة تلغى ونأخذ بدلاً عنها نظائر النقاط ذات الفواصل الموجبة بالنسبة إلى محور التراتيب وفق مجموعة التعريف.

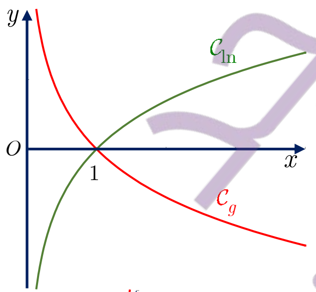
مثال13: انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x\mapsto \ln x$، ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية:
$x\mapsto \ln(-x)$، $x\mapsto -\ln x$ و $x\mapsto -\ln(-x)$،
و $x\mapsto 1+\ln x$.

الحل:

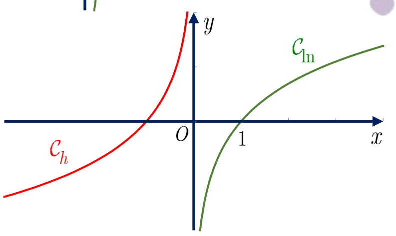
- $f(x)=\ln(-x)$ يكون C_f نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى Oy.



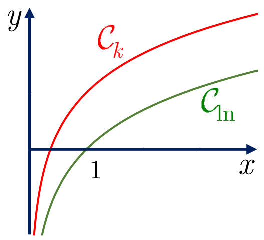
- $g(x)=-\ln(x)$ يكون C_g نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور الفواصل.



- $h(x)=-\ln(-x)$ يكون C_h نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور المبدأ.



- $k(x)=1+\ln(x)$ يكون $\mathcal{C}_k$ ناتج من $\mathcal{C}_{\ln}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.



تمارين عامة

[20] f المعرف على $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$.

ⓐ أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعة المشتق $f'(x)$.

ⓑ نظِّم جدولاً يبيّن جهة اطراد f .

ⓒ استنتج أنَّ $\dfrac{1}{x}+\ln x-1\geq 0$ أياً يكن $x\in I$.

الحل:

[21] أثبت أنَّ المستقيم $y=x-1$ مقارب للخط البياني للتابع $f:x\mapsto x-x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ في جوار $+\infty$.

الحل:

[22] ليكن f المعرّف على $D_f=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$:

$$f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

a) أثبت أن $\Delta: y=2x-1$ مقارب، وادرس الوضع النسبي

b) ادرس تغيرات التابع f ، على $]0,+\infty[$.

c) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على $]0,+\infty[$ ، ثُمَّ ارسم C .

d) استنتج رسم $g(x)=-2x+1+\ln(\frac{1+x}{x})$.

الحل:

[23] ليكن f المعرّف على $]0,+\infty[$: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

a) ادرس تغيرات التابع. ثُمّ ارسم C.

b) استنتج حلول المعادلة $2^x = x^2$

c) قارن بين π^e , e^π.

الحل:

[24] لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

ⓐ ادرس تغيرات $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ على $]0,+\infty[$.

ⓑ $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. أثبت $S_n = \ln(n+1)$. ما نهايتها

الحل:

سما المجد التعليمية

[25] ليكن f المعرف على $I =]-1,1[$ وفق $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

ⓐ أثبت أنَّ f تابع فردي.

ⓑ أثبت أنَّ f اشتقاقي على I.

ⓒ ادرس تغيرات f على $[0,1[$. ثم ارسم الخط البياني.

الحل:

[26] ليكن f المعطى وفق : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)$.

ⓐ تحقّق أنَّ D_f، مجموعة تعريف f، هي $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

ⓑ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه.

ⓒ أثبت أنَّ f متناقص تماماً على كلٍ من مجالي D_f.

ⓓ ارسم في معلم متجانس الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل:

المجد التعليمية

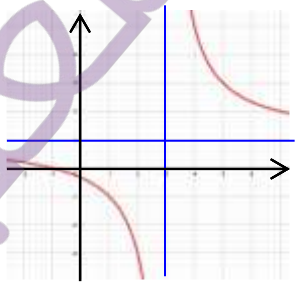
مركز التناظر:

تكون النقطة (x_0,y_0) مركز تناظر إذا كان:

$\boxed{① \; x \in D \Rightarrow 2x_0 - x \in D \quad ② \; f(x)+f(2x_0-x)=2y_0}$

ويكون C_f متناظر بالنسبة النقطة (x_0,y_0).

مثال: التابع $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-3}$ له مركز تناظر هو $I(3,1)$.



$D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ و $2x_0 - x = 6-x$

الشرط ① أياً كان $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ فإن

$-x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ ومنه

$6-x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$

الشرط ②

$$f(x)+f(2x_0-x)=f(x)+f(6-x)$$
$$=\frac{x+1}{x-3}+\frac{6-x+1}{6-x-3}$$
$$=\frac{x+1}{x-3}+\frac{7-x}{3-x}=$$
$$\frac{x+1}{x-3}+\frac{-7+x}{x-3}$$
$$=\frac{2(x-3)}{x-3}=2=2y_0$$

[27] ليكن: $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$. و $D_f=]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

a) أثبت أن $I(1,0)$ مركز تناظر.

b) ادرس تغيرات التابع f على $]2,+\infty[$ ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

الحل:

[28] ليكن f التابع المعرّف على D بوضع $f(0)=0$ و $f(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}$. و C الخط البياني للتابع f .

a) أثبت صحة المتراجحة $\ln x < x$.

b) جد مجموعة تعريف f ثم أثبت أنّ f مستمرٌ عند الصفر.

c) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر.

d) عيّن إن أمكن المماس للخط C عند مبدأ الإحداثيات.

e) ما نهاية f عند $+\infty$؟ ثُمّ ادرس تغيرات f .

f) أعط معادلة للمماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها 1.

g) ارسم الخط C .

h) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\dfrac{\ln x}{\ln x - x}$

الحل:

سما المجد التعليمية

[29] ليكن f المعرّف على $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{x}$

a) أثبت أن $\Delta : y = x+\frac{1}{2}$ مقارب، وادرس الوضع النسبي

b) ادرس اطراد التابع $g(x)=x^2+1-\ln x$.

c) أثبت أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ وادرس تغيرات التابع f .

d) اثبت ان للمعادلة $2x^2+(1-2\lambda)x+\ln x^2=0$ حل وحيد

e) ارسم C .

الحل:

المجد التعليمية

[30] ليكن $P(x)=2x^3+5x^2+x-2$.

ⓐ تحقّق $P(-1)=0$. استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x)=(x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ من الدرجة الثانية.

ⓑ حل المتراجحة $P(x)\leq 0$.

ⓒ استنتج حل المتراجحة $2\ln x+\ln(2x+5)\leq \ln(2-x)$.

الحل:

المجد التعليمية

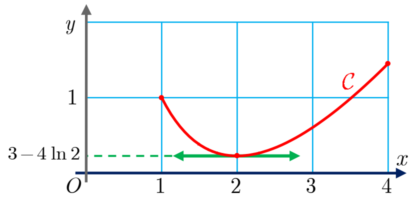
[31] (دورة 2 – 2019) ليكن f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$.

1. عين a,b علماً أن المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم $y = 3x$.
2. لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = 4x - 4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟ وادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$.

الحل:

المجد التعليمية

[32] نتأمّل تابعاً f معرّفاً على المجال $I=[1,4]$ وفق $f(x)=ax+b+c\ln x$ حيث a و b و c أعداد حقيقية



ⓐ أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

ⓑ جد قيم a و b و c ثم اكتب عبارة $f(x)$.

الحل:

تمارين عامة محلولة

[33] f و g المعرفين على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق

$f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

ⓐ أثبت أنَّ $g(x)\le f(x)$ أياً يكن x من I .

ⓑ أثبت C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

الحل: ⓐ لدينا $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

نشكل التابع h المعرف على I بالصيغة $h(x)=f(x)-g(x)$.

$h'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

نستنتج من جدول التغيرات $h(x)\ge h(0)=0$ أياً كانت x من I .

ومنه $f(x)\ge g(x)$ أياً يكن x من I .

ⓑ لدينا أن $f(0)=g(0)=0$ ومنه $(0,0)$ نقطة مشتركة بين الخطين ولإيجاد المماس في النقطة $(0,0)$ نجد $f'(0)=g'(0)=1$

ومنه $y=x$ هو مماس مشترك للخطين C_f و C_g في المبدأ.

[34] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق $f(x)=x+\ln(x^2-1)$

ⓐ أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I .

ⓑ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α . ثم أثبت أنَّ $1<\alpha<\sqrt{1+\dfrac{1}{e}}$.

الحل: ⓐ $f(x)=x+\ln(x^2-1)$ على المجال $I=]1,+\infty[$

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2-1}>0$ ومنه يكون f متزايداً تماماً على I .

ⓑ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ ومنه $f(I)=]-\infty,+\infty[$

أي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى I .

$$f\left(\sqrt{1+e^{-1}}\right)=\sqrt{1+e^{-1}}+\ln e^{-1}=\sqrt{1+e^{-1}}-1=\frac{e^{-1}}{\sqrt{1+e^{-1}}+1}>0$$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$

ولان f متزايداً تماماً على I نجد

$0\in f(]1,\sqrt{1+e^{-1}}[)=]-\infty,\dfrac{e^{-1}}{\sqrt{1+e^{-1}}+1}[$ أي $1<\alpha<\sqrt{1+e^{-1}}$

[35] أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f' .

① $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ و $I=]e,+\infty[$.

② $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I=]1,+\infty[$.

الحل: ① $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ و $I=]e,+\infty[$.

التابع $x\mapsto f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ اشتقاقي على I لأن التابع $x\mapsto \ln x$ اشتقاقي على $I=]e,+\infty[$ ويكون $u: x\mapsto \ln(\ln x)$ اشتقاقياً على I

و $x>e$ أي $\ln x>\ln e=1$ ومنه $\ln(\ln x)>\ln 1=0$

والمشتق يكون $f'(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$.

② التابع $x\mapsto f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ اشتقاقي على I لأن $x\mapsto\dfrac{x+1}{\ln x}$ اشتقاقي على I وموجب تماماً عليه.

و $x\mapsto\ln(x)$ اشتقاقي على $I=]1,+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}\times\frac{\ln x}{x+1}=\frac{x\ln x-x-1}{x(x+1)\ln x}$$

[36] a و b عددين حقيقيين موجبين تماماً يحقّقان $\dfrac{\ln a+\ln b}{2}=\ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right)$ (1) احسب $\dfrac{a}{b}$.

الحل:

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{\ln a+\ln b}{2}=\frac12(\ln a+\ln b)=\frac12\ln(ab)=\ln\sqrt{ab}$$

أي $\ln\left(\dfrac{a+b}{3}\right)=\ln\sqrt{ab}$ أو $\dfrac{a+b}{3}=\sqrt{ab}$

نربع $(a+b)^2=9ab$ وبفك الاقواس نجد

$$a^2-7ab+b^2=0\Rightarrow\left(\frac ab\right)^2-7\frac ab+1=0$$

باستعمال طريقة المميز نجد أن لهذه المعادلة جذران موجبان هما

$\dfrac ab=\dfrac{7-3\sqrt5}{2}$ أو $\dfrac ab=\dfrac{7+3\sqrt5}{2}$

[37] a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ تماماً. حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} xy=a^2 & (1)\\ (\ln x)^2+(\ln y)^2=\dfrac52(\ln a)^2 & (2)\end{cases}$$

الحل: في حالة $x>0$ و $y>0$. لدينا

$$\begin{cases} xy=a^2 & (1)\\ (\ln x)^2+(\ln y)^2=\dfrac52(\ln a)^2 & (2)\end{cases}$$

بسبب وجود المقدارين $\ln x$ و $\ln y$ في المعادلة (2). نأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة (1) فنجد

$$\begin{cases} \ln x+\ln y=2\ln a & (1)\\ (\ln x)^2+(\ln y)^2=\dfrac52(\ln a)^2 & (2)\end{cases}$$

نضع $X=\ln x$ و $Y=\ln y$ فتصبح الجملة:

$$\begin{cases} X+Y=2\ln a & (1)'\\ X^2+Y^2=\dfrac52(\ln a)^2 & (2)'\end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد $Y=2\ln a-X$. نعوض في المعادلة (2) فنحصل على

$$X^2+(2\ln a-X)^2=\frac52(\ln a)^2$$

$$4X^2-8\ln aX+3(\ln a)^2=0$$

$$(2X-\ln a)(2X-3\ln a)=0$$

للجملة حلين هما $(X,Y)=\left(\dfrac{\ln a}{2},\dfrac{3\ln a}{2}\right)$

و $(X,Y)=\left(\dfrac{3\ln a}{2},\dfrac{\ln a}{2}\right)$

أي الحلين $(x,y)=\left(\sqrt a,a\sqrt a\right)$ و $(x,y)=\left(a\sqrt a,\sqrt a\right)$

[38] أيوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحقّقان $\dfrac{\ln a}{\ln b}=\dfrac ab$ (1) ؟

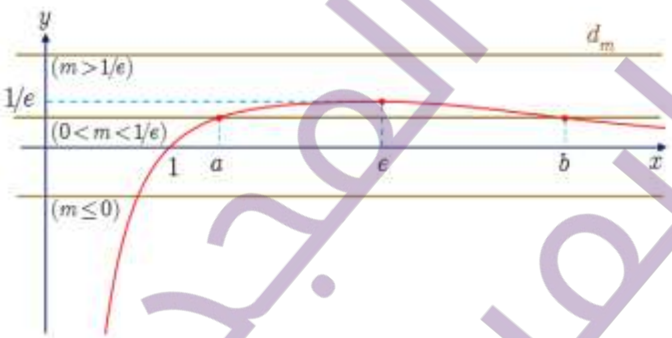
الحل: لدينا $\dfrac ab=\dfrac{\ln a}{\ln b}$ وهي تكافئ $\dfrac{\ln b}{b}=\dfrac{\ln a}{a}$ لذلك نشكل التابع

$$f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac1x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. و $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

و $f'(x)=0$ عند $x=e$ و $f(e)=e^{-1}$.



x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

نناقش حلول المعادلة $f(x)=m$. نلاحظ من الرسم البياني للتابع f ما يأتي:

– في حالة $m>\dfrac1e$ لا يوجد حل أي $S=\varnothing$.

– في حالة $m=\dfrac1e$ حل وحيد أي $S=\{e\}$.

– في حالة $0<m<\frac{1}{e}$ يوجد حلان $S=\{a,b\}$ حيث a هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى $]0,e[$ و b هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى $]e,+\infty[$.

– في حالة $m\le 0$ يوجد حل وحيد أي $S=\{a\}$ حيث a هو الحل الوحيد الذي ينتمي إلى المجال $]0,e[$.

ومنه يكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان اذا وفقط اذا كان $0<m<\frac{1}{e}$.

نستنتج أنه مهما كانت m من $]0,1/e[$ يوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a)=f(b)=m$.

[39] أثبت أنَّ المتراجحة $\ln(x)\cdot\ln(1-x)\le(\ln 2)^2$ محققة، أيًّا يكن x من $]0,1[$.

الحل: لإثبات صحة المتراجحة $\ln(x)\cdot\ln(1-x)\le(\ln 2)^2$ نقوم بدراسة تغيرات التابع f المعرف على المجال $]0,1[$ وفق $f(x)=\ln x\ln(1-x)$.

عند الصفر : لدينا

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\ln(1-x)}{-x}\times x\ln x\right)=(-1)(0)=0$$

عند الواحد: لدينا $f(x)=-\frac{\ln(1+(x-1))}{(x-1)}\times(1-x)\ln(1-x)$

ومنه $\lim_{x\to1}f(x)=0$ لأن

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(1+(x-1))}{(x-1)}=1,\ \lim_{x\to1}(1-x)\ln(1-x)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\ln(1-x)+\ln x\times\frac{-1}{1-x}=\frac{(1-x)\ln(1-x)-x\ln x}{x(1-x)}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$(\ln 2)^2$	$\searrow$	0

ومنه مهما كانت x من المجال $]0,1[$ كان

$$\ln x\cdot\ln(1-x)\le(\ln 2)^2$$

[40] ليكن للتابع f المعرف على المجال $I=]4,+\infty[$ وفق

$$f(x)=5-2x+3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

① أثبت أنَّ d الذي معادلته $y=5-2x$ مقارب للخط C.

② ادرس الوضع النسبي للخط C ومقاربه d.

③ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها. ثُمَّ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني C.

④ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α، واحصره في مجال طوله يساوي 1.

الحل: ① لنتأمل :

$$h(x)=f(x)-(5-2x)=3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)=3\ln\left(1+\frac{5}{x-4}\right)$$

$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{5}{x-4}\right)=\ln1=0$ ومن $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ فالمستقيم $d: y=5-2x$ مقارب في جوار $+\infty$.

② لدينا $1+\frac{5}{x-4}>1$ في حالة x من I نجد $h(x)>0$ على I والخط البياني C يقع فوق d.

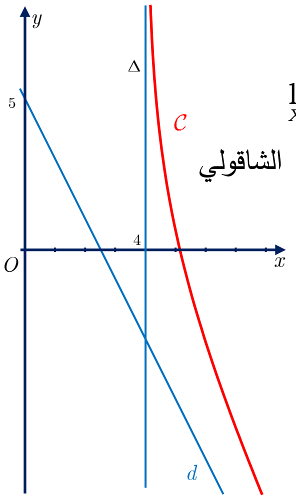
③ $\lim_{x\to4^+}\frac{x+1}{x-4}=+\infty$ و $\lim_{X\to\infty}\ln X=+\infty$

ومنه $\lim_{x\to4^+}f(x)=+\infty$ فالمستقيم Δ الشاقولي $x=4$ مقارب لخط $\mathcal{C}$.

ولما كان $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)=\ln1=0$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$.

لحساب $f'(x)$ نلاحظ أن



$f(x)=5-2x+3(\ln(x+1)-\ln(x-4))$ فيكون:

$$f'(x)=-2+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-4}=-2-\frac{15}{(x+1)(x-4)}<0$$

x	4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

④ نجد في جدول تغيرات f أن مجموعة قيم التابع f هي $\mathbb{R}$ والتابع متناقص تماماً فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد وليكن α ينتمي إلى المجال I. نحسب

$$f(5)=3\ln6-5\approx0.375$$
$$f(6)=3\ln\tfrac{7}{2}-7\approx-3.34$$

إذن $5<\alpha<6$.

[41] ليكن f المعرف على بالعلاقة $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]1,3[$.

② أثبت أنَّ النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C.

③ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه.

④ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها. وارسم الخط C

الحل: ① التابع f عندما يكون $\frac{x-1}{3-x}>0$ وهذا يكافئ قولنا $(x-3)(x-1)<0$. ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجال $]1,3[$. إذن $D_f=]1,3[$.

② التابع $x \mapsto s(x)=4-x$ تابع متناقص تماماً ومنه $s(]1,3[)=]s(3),s(1)[=]1,3[$ أي إذا كان $x\in D_f$ كان $s(x)=(4-x)\in D_f$.

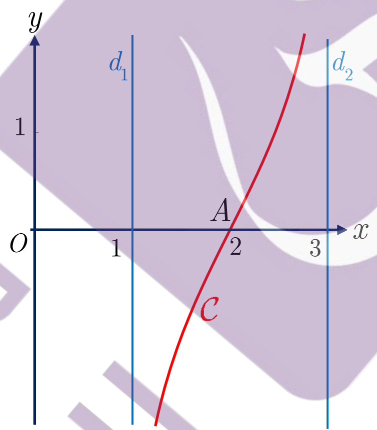
$$f(4-x)+f(x)=\ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{3-x}{x-1}\times\frac{x-1}{3-x}\right)=\ln 1=0$$

ومن السابق نجد تكون النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C.

③ $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$. ومنه $d_1 : x=1$ مستقيم مقارب للخط C.

$\lim_{x\to3^-} f(x)=+\infty$. ومنه $d_2 : x=3$ مقارب للخط C.

④
$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x-1}{3-x}}\left(\frac{x-1}{3-x}\right)'$$
$$=\frac{2}{(3-x)^2}\times\frac{3-x}{x-1}$$
$$=\frac{2}{(x-1)(3-x)}$$



x	1		3
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖

[42] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$.

① احسب $\lim_{x\to0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. ما مقاربات الخط C؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط C.

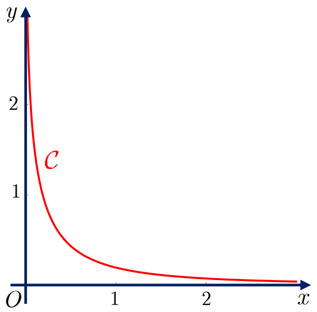
الحل: ① $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$. ومنه محور التراتيب مقارب للخط $\mathcal{C}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. ومنه محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② نلاحظ أن

$$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x(1+x)}=\frac{-1}{x(1+x)^2}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0



[43] ادرس التابع f على $I=\mathbb{R}_+^*$ ، وارسم خطه البياني C.

① $f(x)=(x+1)\ln x$. ② $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$.

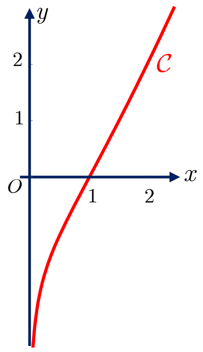
الحل: ① دراسة تغيرات $f(x)=(x+1)\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

• $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$. ومنه محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

وعلى I لدينا $f'(x)=\ln x+1+\frac{1}{x}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



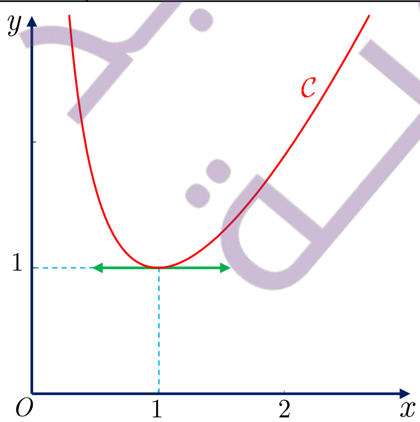
② دراسة $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$. ومنه محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

لدينا $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}+\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



[44] ليكن f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$.

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط C.

② لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 النقاط المعرّفة كما يأتي:

■ M_1 نقطة تقاطع C مع محور الفواصل.

■ M_2 نقطة من C مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.

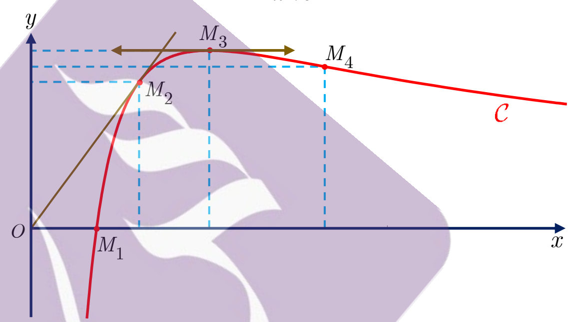
■ M_3 نقطة من C مماسه منها يوازي محور الفواصل.

■ M_4 نقطة من C ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

احسب فواصل هذه النقاط.

③ أثبت أنَّ تلك الفواصل هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية.

الحل: ① $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. ومنه $x=0$ مستقيم مقارب للخط C.



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. ومنه $y=0$ مستقيم مقارب

$$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$$

ينعدم $f'(x)$ عند $x=1$. وإشارته تعاكس إشارة $\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

② يتقاطع C مع محور الفواصل في M_1 التي تحقق فاصلتها $x=-1$ إذن $x_1=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

نرمز فاصلة M_2 بـ x_2 فيكون ترتيبها $y_2=f(x_2)=\frac{1+\ln x_2}{x_2}$

ويكون ميل المماس عندها $f'(x_2)=\frac{-\ln x_2}{x_2^2}$ فمعادلته

$y=y_2+f'(x_2)(x-x_2)$ أي $y=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_2}{{x_2}^2}(x-x_2)$

يمر هذا المماس بالمبدأ إذا حققت النقطة $(0,0)$ معادلته أي

$$0=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_2}{{x_2}^2}(0-x_2)$$

$2\ln x_2+1=0$ ومنه $x_2=e^{-1/2}=1/\sqrt{e}$. وهو فاصلة M_2 .

• مماس C عند $M_3(x_3,y_3)$ يوازي Ox إذن $f'(x_3)=0$. ومنه $x_3=1$ وهو فاصلة M_3 .

• لتكن x_4 فاصلة M_4 . لدينا $f''(x)=\frac{2\ln x-1}{x^3}$ ينعدم $f''(x)$ عند حلول المعادلة $2\ln x=1$ ومنه $x_4=e^{1/2}=\sqrt{e}$. وهو فاصلة M_4 . فواصل Δ هي $x_1=\frac{1}{e}$ $x_2=\frac{1}{\sqrt{e}}$ $x_3=1$ $x_4=\sqrt{e}$.

③ نستنتج (x_1,x_2,x_3,x_4) هي أربعة حدود متوالية من متتالية هندسية. أساسها $\sqrt{e}$ لأنّ $x_i=\frac{1}{e\sqrt{e}}e^{k/2}$ حيث $i=1,2,3,4$.

[45] ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ وفق $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$ ، وليكن C خطه البياني.

① أثبت أنَّ النقطة $A(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ هي مركز تناظر الخط C .

② ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.

③ أثبت أنَّ d الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ مقارب. وادرس الوضع النسبي ثم ارسم C .

الحل: ① ومنه إذا كان x عنصراً من D_f كان $1-x$ أيضاً عنصراً من D_f وأمكننا حساب

$$f(x)+f(1-x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{1-x}{2}+\ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|$$

$$=-\frac{1}{2}+\ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\cdot\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)=-\frac{1}{2}$$

من تحقق الشرطين :

(1) أياً كان x من D_f كان $1-x$ عنصراً من D_f

(2) $\frac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\frac{1}{4}$

نجد النقطة $A(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ هي مركز تناظر للخط البياني للتابع f .

② ندرس على كل من المجالين $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ لان النقطة $A(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ هي مركز تناظر.

▪ على المجال $]\frac{1}{2},1[$ لدينا $\left|\frac{x-1}{x}\right|=\frac{1-x}{x}$

$$f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)=-\frac{x}{2}+\ln(1-x)-\ln x$$

ولدينا $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ ومنه $x=1$ مستقيم مقارب للخط للتابع f .

وكذلك فإن $f'(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}$

وهو سالب تماماً على المجال $]\frac{1}{2},1[$ لأنه يساوي مجموع ثلاثة مقادير سالبة تماماً.

x	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$-\frac{9}{2}$	$-$	‖
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

▪ على المجال $]1,+\infty[$ لدينا $\left|\frac{x-1}{x}\right|=\frac{x-1}{x}$

$$f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\frac{x}{2}+\ln(x-1)-\ln x$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ ومنه $x=1$ مستقيم مقارب للخط للتابع f .

. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x} = \frac{2+x-x^2}{2(x-1)x} = \frac{(1+x)}{2(x-1)x}(2-x)$$

ينعدم $f'(x)$ على المجال $]1,+\infty[$ عند $x=2$.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-\ln 2-1$	↘	$-\infty$

③ لدينا $f(x)+\frac{x}{2} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln\left|1-\frac{1}{x}\right|$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)=0$

ومنه $d: y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ و $+\infty$.

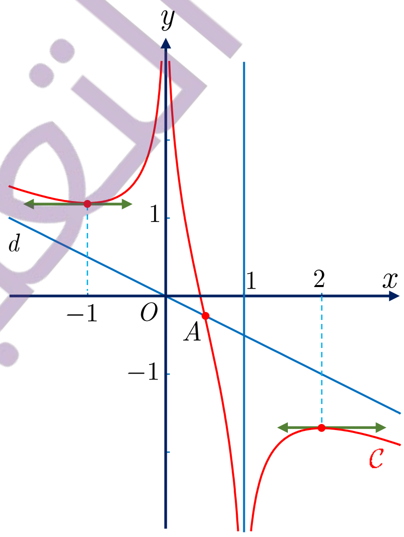
والمعادلة $f(x)+\frac{x}{2}=0$ تكافئ $\left|1-\frac{1}{x}\right|=1$ وهذا يكافئ $x=\frac{1}{2}$.

$$x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<\frac{1}{x}<2 \Leftrightarrow 0>-\frac{1}{x}>-2$$

$$\Leftrightarrow 1>1-\frac{1}{x}>-1 \Leftrightarrow \left|1-\frac{1}{x}\right|<1 \Leftrightarrow \ln\left|1-\frac{1}{x}\right|<0$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\mathcal{C}$		فوق d	‖	فوق d	|	تحت d	‖	تحت d	

بعد رسم C على كل من المجالين $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ نستفيد من الخاصة التناظرية لنتمم الرسم.



[46] ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ،

ⓐ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

ⓑ لتكن A النقطة من الخط C التي فاصلتها 1. جد معادلة للمستقيم T_A المماس للخط C في النقطة A . ثم ارسم C.

ⓒ لتكن B نقطة من الخط C فاصلتها u . أثبت أنَّ $u^3-1+2\ln u=0$ هو الشرط اللازم والكافي ليكون المماس T_B للخط C في النقطة B موازياً للمستقيم Δ الذي معادلته $y=x$.

ⓓ حل المعادلة $u^3-1+2\ln u=0$. ثم استنتج أنَّ A هي النقطة الوحيدة من C يكون المماس فيها موازياً للمستقيم $y=x$.

الحل:

ⓐ $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$. ومنه محور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. ومنه محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

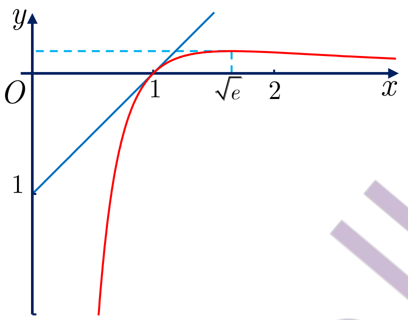
لدراسة التغيرات نحسب المشتق : $f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

ينعدم المشتق $f'(x)$ عندما $1-2\ln x=0$ ، أي في حالة $x=\sqrt{e}$. وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

ⓑ معادلة المماس T_A في النقطة التي فاصلتها 1 أي $A(1,0)$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=x-1$.

ونجد في الشكل المجاور الرسم المطلوب.



ⓒ معادلة المماس T_B في النقطة التي فاصلتها u هي $y=f(u)+f'(u)(x-u)$ ، وميله $f'(u)$. يوازي هذا المماس المستقيم الذي معادلته $y=x$ إذا وفقط إذا كان ميله مساوياً الواحد أي إذا وفقط إذا تحقق الشرط $\frac{1-2\ln u}{u^3}=1$ وهذا يكافئ $u^3+2\ln u-1=0$.

ⓓ لنتأمّل التابع $g(x)=x^3-1+2\ln x$ ، ولنلاحظ أنّه يساوي مجموع تابعين متزايدين تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ هما التابع $x\mapsto \ln x$ و $x\mapsto x^3-1$ ، فهو إذن تابعٌ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. من الواضح أنّ $g(1)=0$ ، (لأننا نعرف مسبقاً أنّ T_A يوازي منصف الربع الأوّل Δ ، إذن $u=1$ حلٌّ للمعادلة المدروسة). وعليه لأنّ التابع g متزايدٌ تماماً كان الحلّ $u=1$ هو الحلّ الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

نستنتج مما سبق أنّ المماس T_A للخط $\mathcal{C}$ في A هو المماس الوحيد الذي يوازي المستقيم Δ .

[47] في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

ⓐ احسب نهاية $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ واستنتج أنَّ f اشتقاقي في $x=0$.

ⓑ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

ⓒ ليكن $\mathcal{T}$ مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها $x=1$، منه، جد معادلةً لهذا المماس.

ⓓ نهدف هنا دراسة الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمماس $\mathcal{T}$. ولهذا نعرف التابع h على المجال $[0,+\infty[$ بالعلاقة $h(x)=f(x)+x-\frac{1}{4}$. ادرس، إشارة $h''(x)$ لتستنتج إشارة $h'(x)$ ومن ثَمّ إشارة $h(x)$.

ⓔ ارسم المماس $\mathcal{T}$ ومماساته $\mathcal{C}$ في نقاط تقاطعه مع محور الفواصل ثم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل:

ⓐ في حالة $x>0$ لدينا المقدار $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ حيث

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}=\frac{x}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(x\ln x-\frac{3}{2}x\right)$$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ و $f'(0)=0$.

ⓑ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لدينا $f'(0)=0$. وفي حالة $x>0$ لدينا:

$$f'(x)=x\ln x-x=x(\ln x-1)$$

ينعدم $f'(x)$ عندما $x=0$ و $x=e$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^2/4$	$\nearrow$	$+\infty$

ⓒ معادلة $\mathcal{T}$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=\frac{1}{4}-x$.

ⓓ نعرف $h(x)=f(x)+x-\frac{1}{4}$ فيكون

$h'(x)=x\ln x-x+1$

$r(x)=x\ln x-x+1$

$r'(x)=\ln x$

جدول اطراد التابع r هو

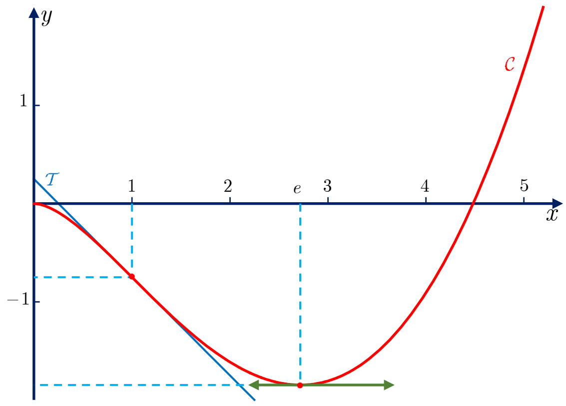
x	0		1		$+\infty$
$r'(x)$		$-$	0	$+$	
$r(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه يكون $r(x)\geq 0$ أي $h'(x)\geq 0$ فهو متزايد تماماً وينعدم بالتجريب عند الواحد.

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$\mathcal{C}$ تحت $\mathcal{T}$ | فوق $\mathcal{T}$

ⓔ الرسم.



[48] ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\ln x+1-x$،

a) استنتج في حالة $x>0$ صحة المتراجحة

$(1)\cdots\ln x\leq x-1$

b) بالاستفادة من (1) برهن أنّه في حالة $t>-1$، يكون $\ln(1+t)\leq t$.

c) وكذلك باختيار $x=\frac{1}{1+t}$، أثبت أنّه في حالة $t\geq -1$، يكون $\frac{t}{1+t}\leq\ln(1+t)$.

d) ليكن p عدداً طبيعياً موجباً تماماً. ولنضع $x=\frac{1}{p}$. أثبت انطلاقاً من (2) أنّ $\frac{1}{p+1}\leq\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\leq\frac{1}{p}$.

e) نعرّف $(u_n)_{n\geq1}$ بالعلاقة $u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$. أثبت أنّ $u_n\leq\ln 2\leq u_n+\frac{1}{2n}$.

f) استنتج أنّ $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة من العدد $\ln 2$.

g) احصر العدد $\ln 2$ باختيار $n=10$.

الحل:

a) $\lim_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}(1-x)=1$، إذن $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

أمّا في جوار $+\infty$، فلدينا

$$f(x)=x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1\right).$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\times(-1)=-\infty$.

- يحسب مشتق f بسهولة بالعلاقة $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$، فإشارته تتفق مع إشارة $(1-x)$ على $\mathbb{R}_+^*$، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نجد من جدول تغيرات f أنّ $f(x)\le 0$ أياً كان x من $\mathbb{R}_+^*$، أي $\ln x+1-x\le 0$. ومنه المتراجحة (1).

b) في حالة $t>-1$ يكون $x=t+1>0$ وبالتعويض في (1)، فنحصل على $\ln(1+t)\le t$.

c) وكذلك يكون $x=\frac{1}{1+t}>0$، وبالتعويض في (1)، نحصل على $\ln\left(\frac{1}{1+t}\right)\le\frac{1}{1+t}-1$، أي $-\ln(1+t)\le-\frac{t}{1+t}$ أو $\frac{t}{1+t}\le\ln(1+t)$.

نستنتج إذن صحة المتراجحة: في حالة $t>-1$ لدينا

$$\frac{t}{1+t}\le\ln(1+t)\le t \quad\cdots(2)$$

d) نختار $t=\frac{1}{p}$ في المتراجحة (2)، فنحصل على

$$\frac{1}{p+1}\le\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$$

e) نلاحظ أولاً أنّ u_n هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين $n+1$ و $2n$.

ينتج من ذلك وباستعمال الطرف الأيسر أي $\frac{1}{p+1}\le\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$ من المتراجحة السابقة أنّ

$$\begin{aligned}
u_n &= \underset{p=n}{\frac{1}{n+1}}+\underset{p=n+1}{\frac{1}{n+2}}+\cdots+\underset{p=2n-2}{\frac{1}{2n-1}}+\underset{p=2n-1}{\frac{1}{2n}}\\
&\le \ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\ln\frac{2n-1}{2n-2}+\ln\frac{2n}{2n-1}\\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-2}\times\frac{2n}{2n-1}\right)\\
&= \ln\frac{2n}{n}=\ln 2
\end{aligned}$$

وبالمثل، بالاستفادة من الطرف الأيمن أي $\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$ من المتراجحات السابقة، وملاحظة أنّ $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$، ومن ثمّ فإنّ $u_n+\frac{1}{2n}$ هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين n و $2n-1$. نجد

$$\begin{aligned}
u_n+\frac{1}{2n} &= \underset{p=n}{\frac{1}{n}}+\underset{p=n+1}{\frac{1}{n+1}}+\cdots+\underset{p=2n-2}{\frac{1}{2n-2}}+\underset{p=2n-1}{\frac{1}{2n-1}}\\
&\ge \ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\ln\frac{2n-1}{2n-2}+\ln\frac{2n}{2n-1}\\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-2}\times\frac{2n}{2n-1}\right)\\
&= \ln\frac{2n}{n}=\ln 2
\end{aligned}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $u_n\le\ln 2\le u_n+\frac{1}{2n}$ في حالة $n\ge 1$.

f) يمكن كتابة المتراجحة السابقة بالصيغة $\ln 2-\frac{1}{2n}\le u_n\le\ln 2$، وباستعمال مبرهنة الإحاطة نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln 2$ لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$.

g) نستعمل المتراجحة السابقة بوضع $n=10$، فنحصل على $u_{10}\le\ln 2\le u_{10}+\frac{1}{20}$، نستعمل آلة حاسبة لحساب $u_{10}=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{20}$، فنجد $0.668\le u_{10}\le 0.669$ إذن $0.668\le\ln 2\le 0.669+0.05$، ومن ثَمّ $0.669\le\ln 2\le 0.719$.

التابع الأسـي

1. التابع الأسـي النيبري:

- هو تابع يحول المجموع إلى جداء ونرمز له e حيث

$$f : \mathbb{R} \to]0, \infty[: f(x) = e^x$$

- هو تابع متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}$

قيم تقريبية: $e = 2.7 \;, e^2 = 7.4$

[1] في الحالات الآتية عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

(1) $e^x + 1$ (2) $\dfrac{1}{e^x - 1}$ (3) $\ln(e^x + 2)$ (4) $\dfrac{1}{e^x + 3}$

الحل:

2. خواص التابع الأسـي:

$$e^a e^b = e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad (e^a)^b = e^{a \times b}$$

$$e^0 = 1, e^x > 0 \qquad \ln e^x = x \qquad e^{\ln x} = x$$

مثال1: بسّط كلاً من العبارات الآتية، علماً أنّ x عدد حقيقي.

- $A = e^{2+\ln 8} = e^2 \times e^{\ln 8} = e^2 \times 8 = 8e^2$.
- $B = \dfrac{e^2}{e^{1+\ln 2}} = \dfrac{e^2}{e^{\ln 2} \times e^1} = \dfrac{e^2}{2e} = \dfrac{e}{2}$.
- $C = e^{2x} \cdot e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$.

[2] بسّط كتابة الأعداد الآتية:

ⓐ $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$ ⓑ $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$

ⓒ $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$ ⓓ $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

الحل:

[3] اكتب بأبسط ما يمكن، مبيّناً المجموعة التي تكون معرّفة عليها:

ⓐ $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$ ⓑ $B = e^{\ln(x-1) - \ln x} + \dfrac{1}{x}$

الحل:

سما المجد التعليمية

[4] في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y

ⓐ $x=\ln e^3-2, y=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$ ⓑ $x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^3, y=\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

الحل:

[5] أثبت صحة المساواة على $\mathbb{R}$.

$$\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$$

الحل:

[6] أثبت أنَّ $f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ تابعٌ ثابتٌ.

الحل:

ملاحظة: لتبسيط الاس يمكن أن نأخذ $e^{\ln}$.

[7] بسّط كتابة الأعداد الآتية:

ⓐ $A=2^{\frac{1}{\ln 2}}$ ⓑ $B=3^{-\frac{1}{\ln 3}}$

ⓒ $C=2^{\frac{1}{\ln 4}}$ ⓓ $D=\frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

الحل:

سما المجد التعليمية

3. حل المعادلات

الخطوات:

- نوجد شرط الحل E
- نوجد حلول المعادلة ثم ندرس انتماء الحلول إلى شرط الحل.

مثال2: حل المعادلات الآتية:

ⓐ $e^{1/x} = e^{x+1}$. شرط الحل $E = \mathbb{R}^*$.

المعادلة تكافئ $\frac{1}{x} = x+1$ أو $x^2 + x - 1 = 0$ ، بالحل

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} , x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ أي $S = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

ⓑ $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$. شرط الحل $E = \mathbb{R}$.

المعادلة تكافئ $(e^x - 1)(e^x - 4) = 0$. ومنه $e^x = 1,\ e^x = 4$

من ثَمّ $x = 0$ ، و $x = \ln 4$. ومنه $S = \{0, \ln 4\}$.

ⓒ $e^x + 4e^{-x} \le 5$ شرط الحل $E = \mathbb{R}$.

$e^x - 5 + \frac{4}{e^x} \le 0$ ، ولأنّ $e^x > 0$ لا تتغير المتراجحة عند ضرب طرفيها بالمقدار e^x ، فهي تُكافئ $e^{2x} - 5e^x + 4 \le 0$.

أي $(e^x - 1)(e^x - 4) \le 0$ وينعدم الطرف الأول عند $x = 0, x = \ln 4$

x	$-\infty$ 0 $\ln 4$ $+\infty$
$(e^x - 1)(e^x - 4)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

فمجموعة حلول المتراجحة هي $[0, \ln 4]$.

[8] حلّ المعادلات الآتية:

ⓐ $e^{3-x} = 1$ ⓑ $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

ⓒ $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$ ⓓ $\ln(e^x - 2) = 3$

ⓔ $3^x = 4^{2x+1}$ ⓕ $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

ⓖ $4e^{2x} - e^x + 2 = 0$ ⓗ $e^{-2x} - 7e^{-x} + 6 = 0$

الحل:

سما المجد التعليمية

4. حل المتراجحات

الخطوات:

- نوجد شرط الحل E
- نوجد حلول المتراجحة ثم نقاطع الحلول مع شرط الحل.

مثال3: حل المتراجحة الآتية: $e^{2x+1} < e^{-x^2+4}$: شرط الحل $E = \mathbb{R}$.

المتراجحة تكافئ $2x+1 < -x^2+4$ أو $x^2+2x-3<0$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

حلول المتراجحة هي $]-3,1[$.

[9] حل كلّ متراجحة فيما يأتي:

ⓐ $e^x \le e^{-x}$ ⓑ $(e^x-1)(e^x-4)<0$

ⓒ $e^x \le 5$ ⓓ $e^x+4e^{-x} \le 5$

ⓔ $e^{x+2} \ge \dfrac{3}{e^x}$ ⓕ $\dfrac{2^x}{2^x+1} < \dfrac{1}{3}$

ⓖ $e^{2x^2-1} \ge 3$ ⓗ $e^{2x}-2e^{-x}-3<0$

ⓘ $\ln(2-e^x) \ge 3$ ⓙ $(e^x-2)e^x > 2(e^x-2)$

ⓡ $3^x > 4$ ⓢ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 4$

الحل:

سما المجد التعليمية

سما المجد التعليمية

[10] حل كلاً من المعادلات والمتراجحات المعطاة

ⓐ (دورة 1 – 2017) حل المعادلة $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$.

ⓑ $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$، و $4^x + 2^{x+1} - 3 \le 0$.

ⓒ $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$، و $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \ge 0$.

ⓓ $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$، و $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \ge 7$.

الحل:

المجد التعليمية

سما المجد التعليمية

[11] لماذا إشارة $e^x-\frac{4}{e^x}$ مع إشارة (e^x-2) ثُمَّ حل $e^x-\frac{4}{e^x}<0$

الحل:

[12] جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

ⓐ $\begin{cases} e^x-\frac{1}{e}e^y=1 \\ 2e^x+e^y=4+e \end{cases}$

ⓑ $\begin{cases} 3^x\times 3^y=9 \\ 3^x+3^y=4\sqrt{3} \end{cases}$

ⓒ $\begin{cases} xy=e^2 \\ (\ln x)^2+(\ln y)^2=10 \end{cases}$

ⓓ $\begin{cases} x+y=1 \\ 3e^x-e^{y+3}=2e^2 \end{cases}$

الحل:

سما المجد التعليمية

سما المجد التعليمية

5. نهاية التابع الأسي:

قواعد النهايات

$\boxed{e^0} \to \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\boxed{e^\infty} \to \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \ , \ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

$\boxed{e^{-\infty}} \to \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

في حالة $1^{\pm\infty}$:
- نجعل ما بين القوسين (1+ شيء).
- نأخذ $e^{\ln}$ وندبلك.
- نستعمل القاعدة: $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$.

في حالات عدم التعيين غالباً نتبع

حالة $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ و $+\infty-\infty$: عامل مشترك أو قواعد

حالة $0\times(\pm\infty)$: نشر أو قواعد

حالة $\frac{0}{0}$: قواعد

مخطط يساعد في حفظ القوانين

$e\uparrow$	0		1		$+\infty$	$\downarrow\ln$
	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	

$e^0=1$	$\ln 1=0$
$e^{+\infty}=+\infty$	$\ln(0^+)=-\infty$
$e^{-\infty}=0$	$\ln(+\infty)=+\infty$
$\ln e^x=x$	$\ln\ ]1,+\infty[\ >0$
$e^{\ln x}=x$	$\ln\ ]0,1[\ <0$
$D_e=\mathbb{R}$	$D_{\ln}=]0,+\infty[$
$e^x\in]0,+\infty[$	$\ln x\in\mathbb{R}$

مثال4: احسب كلاً من نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$:

ⓐ $f(x)=x-e^x \quad a=+\infty$

نكتب $f(x)=e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right)$. ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

ⓑ $f(x)=e^{2x}-e^x \quad a=+\infty$

نكتب $g(x)=e^x(e^x-1)$. ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ⓒ $f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x} \quad a=+\infty$

نكتب $g(x)=\frac{e^x(2+e^{-x})}{e^x(e^{-x}+1)}=\frac{2+e^{-x}}{1+e^{-x}}$. ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x)=2$.

ⓖ $f(x)=(1+x)^{1/x} \quad a=0$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to0} e^{\ln(1+x)^{1/x}}$$

$$=\lim_{x\to0} e^{1/x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^1=e$$

لأن $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$.

ⓗ $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad a=+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}=e^1=e$$

لأن $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$.

ⓘ $f(x)=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x/2} \quad a=+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x/2}=\lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x/2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x}{2}\frac{4}{x-1}\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)}{\frac{4}{x-1}}}=e^2$$

لأن $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$.

[13] جد نهاية كلٍ من التوابع الآتية عند a:

ⓐ $f(x)=\frac{e^x-1}{2x} \quad a=0$ ⓑ $f(x)=\frac{1}{x}(e^x-1) \quad a=0,+\infty$

ⓒ $f(x)=e^{2x}-e^x+3 \quad a=+\infty$ ⓓ $f(x)=2xe^{-x} \quad a=+\infty$

ⓔ $f(x)=2x-1+e^{-x} \quad a=-\infty$ ⓕ $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1} \quad a=+\infty$

ⓖ $f(x)=\ln x-e^x \quad a=+\infty$ ⓗ $f(x)=\frac{e^x-1}{x-1} \quad a=+\infty$

ⓘ $f(x)=(2-x)^{\frac{3}{x-1}} \quad a=1$ ⓙ $f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} \quad a=+\infty$

الحل:

6. اشتقاق التابع الأسي:

- $(e^x)' = e^x \quad , \qquad (a^x)' = \ln a \times a^x$
- عندما تكون الحشوة ليست x نضرب بمشتق الحشوة

ملاحظة: إذا كان الأس يحوي مجهول يجب أن يكون الأساس e
لذلك في حالة المعادلة والمتراجحة نأخذ لوغاريتم الطرفين
وفي حالة العبارة والتابع نأخذ $e^{\ln}$.

[14] جد $f'(x)$ لكلٍ من التوابع الآتية:

ⓐ $f(x) = e^{x^2-x}$ ومنه $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$

ⓑ $f(x) = \pi^{x^2-x}$ أي $f(x) = \pi^{x^2-x} = e^{(x^2-x)\ln\pi}$

ومنه $f'(x) = (\ln\pi)(2x-1)e^{(x^2-x)\ln\pi} = (\ln\pi)(2x-1)\pi^{x^2-x}$

[15] جد $f'(x)$ لكلٍ من التوابع الآتية:

ⓐ $f(x) = (x^2-2x)e^x$ ⓒ $f(x) = \dfrac{1}{x}e^x$

ⓑ $f(x) = \ln(1+e^x)$ ⓓ $f(x) = \dfrac{e^x-1}{1+e^{-x}}$

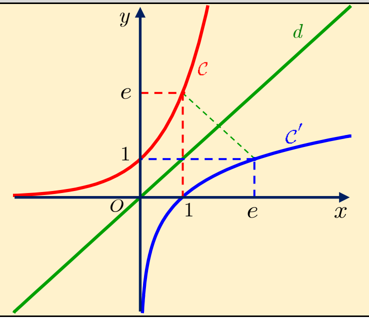
ⓔ $f(x) = e^{-x}\ln x$ ⓕ $f(x) = x^x$

ⓖ $f(x) = 3^{x^2}$ ⓗ $f(x) = \pi^{\ln x}$

الحل:

7. دراسة التابع الاسي

التابعان $\ln$ و e مرجعيان، يمكن ان نقوم كتابة خواصها دون اثبات.
الخطان البيانيان للتابعين $\ln$ و e متناظران بالنسبة إلى منصف الربع الأول



[16] ادرس تغيرات التابع f المعرف وفق $f(x) = e^{x}$ وارسم $\mathcal{C}$.

الحل:

[17] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{x} - x$.

ⓐ بيّن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = -x$ مقارب للخط C؟

ⓑ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم d و C.

الحل:

[18] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(x-1)e^{x}$. ادرس نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثُمّ ارسم C.

الحل:

مثال5: f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{-x}+x-2$.

ⓐ جد المقاربات ثم ادرس تغيرات f

ⓑ بيّن أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$. وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$

الحل: ⓐ في جوار $-\infty$. $f(x)=e^{-x}(1+xe^{x})-2$.

نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$،

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(1+xe^{x})=+\infty$. ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

في جوار $+\infty$. لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$، ومنه

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$$

d الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ و

$f'(x)=-e^{-x}+1=e^{-x}\left(e^{x}-1\right)$.

ينعدم $f'(x)$ فقط عند $x=0$، وإشارته تُماثل إشارة $e^{x}-1$ أي إشارة x، وهذا ما يتيح لنا وضع جدول تغيرات f الآتي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

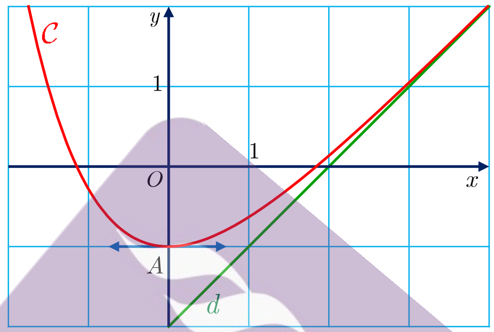
ⓑ حل المعادلة $f(x)=0$:

f مستمرٌ ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty,0[$

إذن $f\left(]-\infty,0[\right)=]-1,+\infty[$ ولمّا كان $0\in]-1,+\infty[$، فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0[$.

f مستمرٌ ومتزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$ إذن $f([0,+\infty[)=[-1,+\infty[$ ولمّا كان $0\in[-1,+\infty[$ ، فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $[0,+\infty[$.

وبهذا يكون للمعادلة $f(x)=0$ حلاّن في $\mathbb{R}$.



مثال6: ليكن f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\exp\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$.

ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

الحل: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=e^0=1$. ومنه $y=1$ مقارب في جوار $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^0=1$. فالمستقيم d مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\frac{e^{u(x)}}{(x^2+1)^2}\left(1-x^2\right)$.

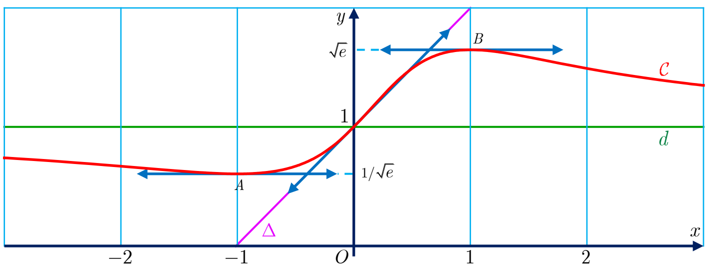
فإشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $1-x^2$ الذي ينعدم عند $x=-1$ و $x=1$، كما إنّ $f(-1)=e^{-\frac{1}{2}}=1/\sqrt{e}$ و $f(1)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$1/\sqrt{e}$	↗	$\sqrt{e}$	↘	1

مماسا $\mathcal{C}$ في $A\left(-1,1/\sqrt{e}\right)$ و $B\left(1,\sqrt{e}\right)$ يوازيان محور الفواصل $\left(f'(-1)=f'(1)=0\right)$.

وفي النقطة $M(0,1)$، ميل المماس $m=f'(0)=1$، فالمُماس يوازي منصف الربع الأول ومعادلته $y=x+1$. نرمز إليه بالرمز Δ.

نرسم d و Δ ومماسي $\mathcal{C}$ في A و B، ثم نرسم الخط $\mathcal{C}$ محققاً صفات f المدروسة.



8. التابع الأسي ذو الأساس a

♣ يوجد رمز اخر للتابع الاسي $\boxed{a^x=\exp_a(x)}$

أي: $2^x=\exp_2(x),\ 3^{2x-1}=\exp_3(2x-1),\ e^x=\exp(x)$

♣ يوجد تابع اللوغاريتمي اخر هو $\boxed{\log_a(x)=\frac{1}{\ln a}\times\ln x}$

أي: $\log_2(x)=\frac{1}{\ln 2}\times\ln x,\ \log(x)=\frac{1}{\ln 10}\times\ln x$

♣ التابع العكسي لـ $\exp_a$ هو $\log_a$ أي $\log_a\leftrightarrow\exp_a$ حيث $\exp_a$ التابع الأسي بالأساس a و $\log_a$ التابع اللوغاريتمي بالأساس a

♣ في حالة خاصة: $e\leftrightarrow\ln$ حيث $\exp_e=e,\ \log_e=\ln$

مثال7: ادرس تغيرات f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x\cdot 2^x$، وارسمه

الحل: لدينا $f(x)=xe^{x\ln 2}$

في جوار $-\infty$ لدينا $f(x)=\frac{1}{\ln 2}x\ln 2e^{x\ln 2}$

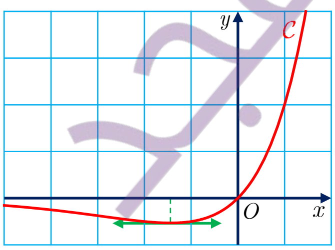
ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$، ومحور الفواصل مقارب في جوار $-\infty$.

في جوار $+\infty$ لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$$f'(x)=e^{x\ln 2}+x\ln 2\times e^{x\ln 2}=e^{x\ln 2}(1+x\ln 2)=2^x(1+x\ln 2)$$

إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $1+x\ln 2$ الذي ينعدم فقط عند $x=-\frac{1}{\ln 2}$. و $f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=-\frac{1}{\ln 2}e^{-\frac{1}{\ln 2}\times\ln 2}=\frac{-1}{e\ln 2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{-1}{e\ln 2}$	↗	$+\infty$



[19] ادرس تغيرات $f(x)=x\cdot 2^{-x}$ المعرف على $\mathbb{R}$ وارسم خطه.

الحل:

[20] ادرس تغيرات $f(x)=2^{x^2-2x}$ المعرف على $\mathbb{R}$ و اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$. وارسم خطه.

الحل:

9. معادلات تفاضلية بسيطة

- المعادلة التفاضلية هي معادلة تحوي مشتق. مثل $y' = y$.
- حل المعادلة التفاضلية $\boxed{y'=ay+b}$, $(a\neq 0, b\in\mathbb{R})$ هي التوابع $\boxed{f(x)=ke^{ax}-\frac{b}{a}}$ حيث k عدد حقيقي

[21] حل المعادلات التفاضلية الآتية:

ⓐ $y' = 3y+2$ ⓑ $y'+2y=1$

ⓒ $3y'=5y$ ⓓ $2y'+3y=0$

الحل:

المجد التعليمية

[22] عيّن حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط:

ⓐ $y' = 2y$ ، والحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$.

ⓑ $y' + 5y = 0$ ، والخط C للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$.

ⓒ $y' + 2y = 0$ ، ميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 هو $\frac{1}{2}$.

الحل:

[23] لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = 0$. لتكن (E') المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = x^2 + 1$.

ⓐ عيّن جميع حلول (E) .

ⓑ عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية f يُحقّق المعادلة (E') .

ⓒ بيّن أنّه إذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان $g - f$ حلاً لـ (E) .

الحل:

بسمة المجد التعليمية

[24] نتأمّل المعادلة التفاضلية : $y' + 3y = 2e^{-x}$. عيّن العدد a ليكون التابع $x \mapsto ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

الحل:

تمارين عامة

[25] بيّن أنّ الخطّ البياني C للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ يقبل مُقارباً مائلاً d ، عيّنه وادرس الوضع النسبي لهذا الخط بالنسبة إلى d .

ⓐ $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$ ⓑ $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$

ⓒ $f(x) = x + 2 + xe^{x}$ ⓓ $f(x) = \ln(3 + e^{x})$

الحل:

[26] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(3-x)e^{x}$.

ⓐ ادرس تغيرات f .

ⓑ اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$.

ⓒ ارسم في معلمٍ واحد المماس d ثم الخط C .

الحل:

سما المجد التعليمية

[27] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2e^{x}-x-2$.

ⓐ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

ⓑ استنتج أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذرين، أحدهما يساوي الصفر.

ⓒ نرمز إلى الجذر الآخر بالرمز α . أثبت أنَّ $-2<\alpha<-1$.

ⓓ ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x .

ⓔ أثبت أن $\Delta : y=-x-2$ مقارب، ثم ارسم C .

الحل:

[28] f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

ⓐ ما نهاية f عند كلٍ من طرفي مجموعة تعريفه؟

ⓑ ادرس تغيرات f وارسم C .

ⓒ استنتج رسم الخط $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ انطلاقاً من C .

سما المجد التعليمية

الحل:

[29] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{2e^x-3}{e^x+1}$.

ⓐ لماذا المستقيمان $d_1: y=2$ و $d_2: y=-3$ مقاربان للخط C؟

ⓑ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

ⓒ اكتب معادلة المماس T في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

ⓓ ادرس وضع C بالنسبة إلى T. و ارسم d_1 و d_2 و T و C.

الحل:

سما المجد التعليمية

[30] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\exp\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها. ارسم الخط C .

الحل:

[31] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^{x}+1}$.

ⓐ أثبت أنَّ C مقارب للخط $d: y=x-1$ في جوار $+\infty$.

ⓑ أثبت أنَّ C مقارب للخط $d': y=x+3$ في جوار $-\infty$.

ⓒ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

ⓓ اكتب معادلة المماس T في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

ⓔ ادرس وضع C بالنسبة إلى T. ثُم ارسم d و d' و T و C.

الحل:

سما المجد التعليمية

[32] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})$.

a) بيّن أنّ التابع f زوجي، وادرس تغيرات f على $I=[0,+\infty[$

b) أثبت أن $f(x)=x+\ln(1+e^{-2x})$

c) استنتج معادلة المقارب المائل عند $+\infty$. ثم ارسم C .

الحل:

السما المجد التعليمية

[33] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$.

ⓐ بيّن أنّ التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

ⓑ اكتب معادلة المماس d للخط $\mathcal{C}$ في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمستقيم d .

ⓒ ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أنَّ للمعادلة $f(x)=m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$. ليكن α هذا الحل.

ثم أثبت أن المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{2x}-2me^{x}-1=0$ ، و أنَّ $\alpha=\ln(m+\sqrt{m^{2}+1})$.

الحل:

سما المجد التعليمية

[34] ليكن f المعرف وفق $f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$.

ⓐ جد D وأثبت $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$

ⓑ أثبت أن d الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$.

ⓒ أثبت أن الخط $\mathcal{C}$ يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

واكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

ⓓ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها. وارسم كلاً من d و Δ و $\mathcal{T}$،

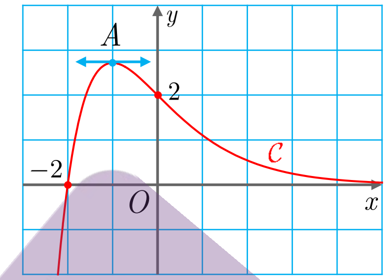
ثم ارسم $\mathcal{C}$ في المعلم ذاته.

الحل:

سما المجد التعليمية

سما المجد التعليمية

[35] C هو الخط البياني لتابعٍ f معرفٍ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان. اعتماداً على ما تجد في الشكل:



ⓐ احسب قيمة a و b.

ⓑ احسب $f'(x)$ ، واستنتج إحداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f .

ⓒ أثبت أنّ محور الفواصل مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

الحل:

تمارين عامة محلولة

[36] احسب التابع المشتق للتابع f .

① $f(x)=(x^2-2x)e^x \Rightarrow f'(x)=(x^2-2)e^x$

② $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x)=-(x^2-3x+2)e^{-x}$

③ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{1+e^{-x}} \Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^{-x}+1)+e^{-x}(e^x-1)}{\left(e^{-x}+1\right)^2}=\frac{2+e^x-e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2}$$

④ $f(x)=\ln(1+e^x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

⑤ $f(x)=(\sin x+\cos x)e^x \Rightarrow f'(x)=2e^x\cos x$

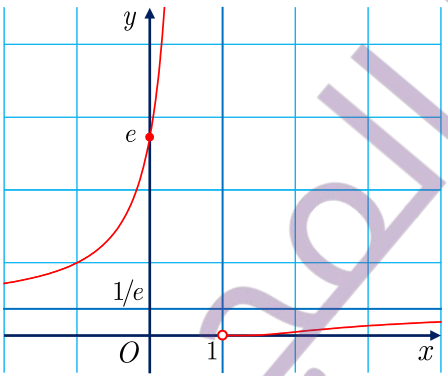
⑥ $f(x)=e^{-x}\ln x \Rightarrow f'(x)=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$

⑦ $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$

[37] ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ بالصيغة $f(x)=\exp\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

الحل: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e^{-1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^{-1}$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$



لان

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x}{1-x}=-1$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{1-x}=-1$

و $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1+x}{1-x}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1+x}{1-x}=-\infty$

ومنه $y=e^{-1}$ مستقيم مقارب للخط البياني X للتابع f .

و $x=1$ مقارب للخط البياني X والنقطة $(1,0)$ نقطة مقاربة.

ولدينا $f'(x)=\dfrac{2}{(1-x)^2}e^{\frac{1+x}{1-x}}>0$

x	$-\infty$			1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		‖		$+$	
$f(x)$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$	‖	0	$\nearrow$	e^{-1}

[38] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln(e^{-x}+1)$.

① جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة؟ وأثبت أنَّ $f(x)=-x+\ln(e^x+1)$. استنتج أنَّ C يقبل مقارباً مائلاً، وليكن d ، في جوار $-\infty$.

② ادرس تغيرات f . ثمّ ارسم في معلمٍ واحد d ثم C.

③ نرمز إلى نقاط C التي فواصلها 0 و 1 و -1 على بالرموز A و B و D. أثبت أنَّ مماس C في A يوازي المستقيم (BD).

الحل: ① بما أن $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ln(1)=0$

ومنه $y=0$ مقارباً أفقياً.

و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

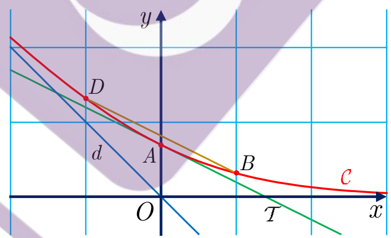
و $f(x)=\ln(e^{-x}+1)=\ln(e^{-x}(1+e^{x}))=-x+\ln(1+e^{x})$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\ln(1)=0$.

ومنه $y=-x$ مستقيم مقارب للخط C للتابع f في جوار $-\infty$.

② $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0



③ ميل المماس T في النقطة $A(0,\ln(2))$ يساوي $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

وميل المستقيم (BD) يساوي

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\ln\frac{e^{-1}+1}{e+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{2}$$

وبما أن للمستقيمين T و (BD) الميل نفسه استنتجنا توازيهما: $T \parallel (BD)$.

[39] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x)=e^{x}+\ln|x|$. وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=xe^{x}+1$.

① ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\dfrac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

② ادرس تغيرات f وارسم الخط C.

③ أثبت أنَّ $f(x)=m$ تقبل حلّين مختلفين أياً يكن m من $\mathbb{R}$.

الحل: ① بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$.

ونلاحظ أن $g'(x)=e^{x}(x+1)$ و $g'(x)=0$ عند $x=-1$ و $g(-1)=1-e^{-1}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن التابع g موجب تماماً على $\mathbb{R}$. ينتج من ذلك أن إشارة $\dfrac{g(x)}{x}$ تتفق مع إشارة x على $\mathbb{R}^*$.

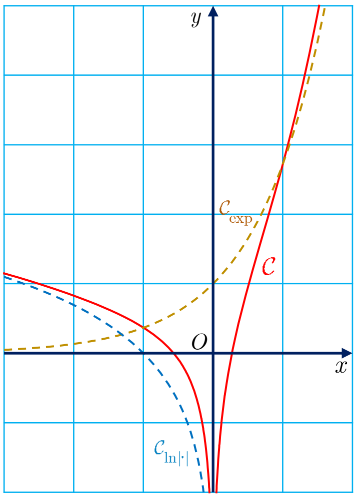
② هنا لدينا $f(x)=e^{x}+\ln(x)$ في حالة $x>0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. ومن ناحية أخرى، لدينا $f(x)=e^{x}+\ln(-x)$ في حالة $x<0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أيضاً.

أما عند الصفر، فلدينا $\lim\limits_{x\to0}\ln|x|=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$.

فمحور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f.

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x}+\dfrac{1}{x} & : \ x>0 \\ e^{x}+\dfrac{-1}{-x} & : \ x<0 \end{cases}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ أياً كانت x من $\mathbb{R}^*$.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

③ التابع f مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty,0[$. و $m\in f(]-\infty,0[)=\mathbb{R}$ إذن مهما كان m فللمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد a في المجال $]-\infty,0[$.

التابع f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$. و $m\in f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ إذن مهما كان m فللمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد b في المجال $]0,+\infty[$.

ومنه مهما كان m من $\mathbb{R}$ فللمعادلة $f(x)=m$ حلان أحدهما موجب تماماً والآخر سالب تماماً.

[40] ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=e^{-x}(3+\ln x)$.

① ادرس تغيرات $g: x\mapsto e^{x}f'(x)$. ② استنتج دراسة تغيرات f.

الحل: ① $g(x)=e^x f'(x)=-3-\ln x+\frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ و

ومنه $x=0$ مقارب للخط البياني للتابع g.

ولدينا $g'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}<0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$		$-$
$g(x)$	‖ ∞	↘	$-\infty$

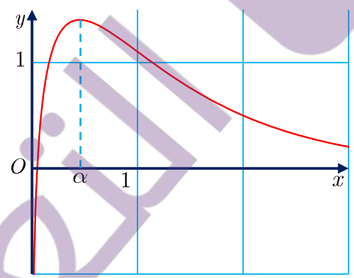
التابع g مستمر متناقص تماماً و $0\in f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$، فيوجد حل وحيد α للمعادلة $g(x)=0$ ويكون $g(x)>0$ على $]0,\alpha[$ و $g(x)<0$ على $]\alpha,+\infty[$. وكذلك نلاحظ أن $g(0.4)\approx 0.416>0$ و $g(0.5)\approx -0.307<0$ إذن $\alpha\in]0.4,0.5[$، ومنه $\alpha\approx 0.45$.

② $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ ومنه $x=0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(3e^{-x}+\frac{x}{e^x}\cdot\frac{\ln x}{x})=0$ لأن $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

ومنه $y=0$ مقارب للخط للتابع.

ولدينا $f'(x)=e^{-x}g(x)$، وإشارة g في الطلب السابق.



x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

[41] نتأمّل التابعين $f_1: x\mapsto e^x$ و $f_2: x\mapsto e^{-x}$، وخطاهما البيانيان C_1 و C_2 يقطع المستقيم المرسوم من $A(m,0)$ موازياً محور التراتيب الخطين C_1 و C_2 في M و N. بالترتيب.

① ارسم C_1 و C_2

② T_1 و T_2 مماسي C_1 و C_2 في M و N بالترتيب. اكتب معادلة لكل من T_1 و T_2. واستنتج أنّ T_1 و T_2 متعامدان.

الحل: ① أن C_2 نظير C_1 بالنسبة إلى محور التراتيب.

② إحداثيا M هما (m,e^m) وإحداثيا N هما (m,e^{-m}).

معادلة المماس T_1 للخط C_1 في M هي $y=e^m+e^m(x-m)$.

معادلة المماس T_2 للخط C_2 في N هي $y=e^{-m}-e^{-m}(x-m)$.

و ميل T_1 يساوي e^m وميل T_2 يساوي $-e^{-m}$ وجداء هذين الميلين يساوي -1، فالمماسان متعامدان.

[42] لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2y'+3y=0$. لتكن (E') المعادلة التفاضلية $2y'+3y=x^2+1$.

ⓐ عيّن جميع حلول (E).

ⓑ عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية f يُحقّق المعادلة (E').

ⓒ بيّن أنّه إذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E)، وبرهن بالعكس، أنّه إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان g حلاً للمعادلة (E'). ثم استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية (E').

الحل: ① الشكل القانوني هو $y'=-\frac{3}{2}y$ وحلولها هي التوابع $x\mapsto ke^{-\frac{3}{2}x}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

② يكون $x\mapsto ax^2+bx+c$ حلاً للمعادلة (E') إذا وفقط إذا، مهما كان x من $\mathbb{R}$ كان

$$2(ax^2+bx+c)'+3(ax^2+bx+c)=x^2+1$$

أو $(3a-1)x^2+(3b+4a)x+2b+3c-1=0$. وهذا يكافئ $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{4}{9}, c=\frac{17}{27}$. إذن كثير الحدود $x\mapsto f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}$ هو حل للمعادلة (E').

نعلم أن $2f'(x)+3f(x)=x^2+1 \quad (*)$

فإذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان

$$2g'(x)+3g(x)=x^2+1 \quad (**)$$

وبطرح $(*)$ و $(**)$ نجد $2(g-f)'(x)+3(g-f)(x)=0$ أي إن الفرق $g-f$ حل للمعادلة (E).

وبالعكس، إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان $2(g-f)'(x)+3(g-f)(x)=0$ أي

$$2g'(x)+3g(x)=2f'(x)+3f(x)=x^2+1$$

أي إن g حل للمعادلة (E').

إذن g حل للمعادلة (E') إذا وفقط إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) أي إذا وجد k في $\mathbb{R}$ بحيث $g(x)-f(x)=ke^{-\frac{3}{2}x}$ أي إن مجموعة حلول (E') هي

$$\left\{x\mapsto \frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x+\frac{17}{27}+ke^{-\frac{3}{2}x} : k\in\mathbb{R}\right\}$$

[43] ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=(x^2+x-1)e^x$. ولتكن $f^{(1)}=f'$ و $f^{(2)}=f''$ و $f^{(3)}$ و $\cdots$ و $f^{(n)}$ المشتقات المتوالية للتابع f $(n\ge 1)$.

① احسب $f^{(1)}(x)$ و $f^{(2)}(x)$.

② أثبت أنّ $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ مع $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=b_n+a_n$. استنتج أنّ a_n و b_n أعداد عادية.

③ أثبت أنّ المتتالية (a_n) حسابية. استنتج كتابة a_n بدلالة n.

ثم تحقق من أنّ $b_n=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1$ (أياً يكن $n\ge 1$) ثم استنتج كتابة b_n بدلالة n.

الحل:

① $f(x)=(x^2+x-1)e^x,\ f^{(1)}(x)=(x^2+3x)e^x$

$f^{(2)}(x)=(x^2+5x+3)e^x$

② "يوجد عددان a_n و b_n يحققان
$f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ أياً كان x " $E(n)\to$.

"يوجد عددان a_{n+1} و b_{n+1} يحققان
$f^{(n+1)}(x)=(x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})e^x$ أياً كان x " $E(n+1)\to$.

$E(1)$ صحيحة حيث $a_1=3$ و $b_1=0$، وكذلك $E(2)$ صحيحة حيث $a_2=5$ و $b_2=3$.

نفرض أن $E(n)$ صحيحة

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)&=\left(f^{(n)}\right)'(x)=(x^2+a_nx+b_n)(e^x)'+(x^2+a_nx+b_n)'e^x\\&=(x^2+a_nx+b_n)e^x+(2x+a_n)e^x\\&=\left(x^2+(a_n+2)x+(a_n+b_n)\right)e^x=(x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})e^x\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً حيث $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=a_n+b_n$. و $E(n)$ منه صحة الخاصة أياً كانت قيمة n.

أثبات a_n و b_n عددان عاديان:

" a_n و b_n عددان عاديان " $E(n)\to$. و " a_{n+1} و b_{n+1} عددان عاديان " $E(n+1)\to$.

الخاصة $E(1)$ صحيحة لأن $(a_1,b_1)=(3,0)$.

نفرض أن $E(n)$ صحيحة ونثبت صحة $E(n+1)$

من المساواتين $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=a_n+b_n$ نجد أن $E(n+1)$ صحيحة أيضاً،

فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كانت قيمة n.

③ نستنتج من المساواة $a_{n+1}-a_n=2$ أن المتتالية $(a_n)_{n\ge1}$ متتالية حسابية أساسها 2 وحدها a_1 يساوي 3.

من $a_n-a_1=2(n-1)$ نستنتج أن $a_n=2n+1$.

ونستنتج من المساواة $b_{n+1}=b_n+a_n$ أياً كانت n أن

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}\\&=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+\ldots+(b_n-b_{n-1})\\&=b_n-b_1=b_n-0=b_n\end{aligned}$$

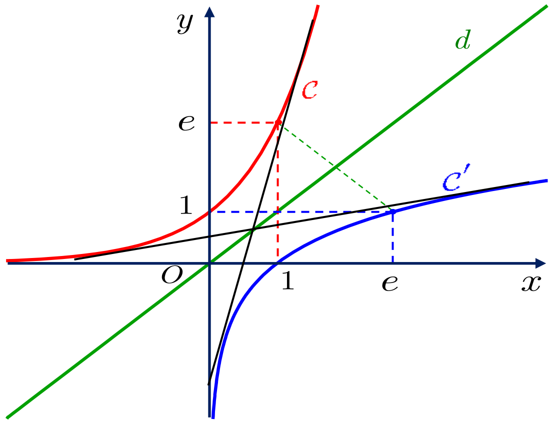
ومنه

$$\begin{aligned}b_n&=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=(n-1)\frac{a_1+a_{n-1}}{2}\\&=(n-1)\frac{3+2n-1}{2}=n^2-1\end{aligned}$$

[44] ليكن C_E و C_L الخطان البيانيان للتابعين الأسي exp واللوغاريتمي ln بالترتيب. أيقبل هذان الخطان مماسات مشتركة؟

الحل:

(1)



(2) ① معادلة T_E هي

$y=e^a+e^a(x-a)$ أي $e^ax-y+e^a(1-a)=0$.

ومعادلة T_L هي $y=\ln b+\frac{1}{b}(x-b)$

أي $\frac{1}{b}x-y+\ln b-1=0$.

② وعليه ينطبق المستقيمان T_L و T_E إذا تناسبت أمثالهما، أي إذا تحقق الشرطان

$e^a=\frac{1}{b}$ و $e^a(1-a)=\ln b-1$

أي $\ln b=-a$ و $(a+1)e^{-a}=a-1$

ولأن $a=-1$ ليس حلاً لهذه المعادلة

$b=e^{-a}$ و $e^{-a}=\frac{a-1}{a+1}$.

(3) ① $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$ ومنه $y=-1$ مقارباً أفقياً في جوار $+\infty$.

و $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty$

ومنه $x=-1$ مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f .

$$f'(x)=-e^{-x}-\frac{2}{(x+1)^2}<0$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

② من جدول التغيرات نلاحظ أن:

التابع مستمر ومتناقص تماماً على $]-\infty,-1[$

و $0\in f(]-\infty,-1[)=]-\infty,+\infty[$

فيوجد جذر وحيد a_1 ينتمي إلى $]-\infty,-1[$ للمعادلة $f(x)=0$.

التابع مستمر ومتناقص تماماً على $]-1,+\infty[$

و $0\in f(]-1,+\infty[)=]-1,+\infty[$

فيوجد جذر وحيد a_2 من $]-1,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=0$. أي تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلين هما a_1 و a_2.

③
$$f(-x)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^x f(x)$$
$$=\left(e^x-\frac{-x-1}{-x+1}\right)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^x\left(e^{-x}-\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$=e^x-\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+1}{x-1}-e^x=0$$

نستنتج من $f(a_1)=0$ أن $f(-a_1)=0$ ولكن $-a_1\in]-1,+\infty[$ لأن $a_1<-1$، ومنه كل من a_2 و $-a_1$ جذر للمعادلة $f(x)=0$ في $]-1,+\infty[$، ولكن للمعادلة جذر وحيد في هذا المجال فإن $a_2=-a_1$.

[45] ليكن α عدداً حقيقياً غير معدوم. نهدف إلى دراسة التابع P_α المعرّف على $]0,+\infty[$ بالصيغة $P_\alpha(x)=x^\alpha$.

الحل: (1) ① التابع $\ln$ متزايد تماماً ومنه:

في حالة $\alpha>0$ يكون $x\mapsto\alpha\ln x$ متزايداً تماماً، ومنه يكون $P_\alpha : x\mapsto e^{\alpha\ln x}$ متزايداً تماماً.

في حالة $\alpha<0$ يكون $x\mapsto\alpha\ln x$ متناقصاً تماماً، ومنه $P_\alpha : x\mapsto e^{\alpha\ln x}$ متناقصاً تماماً.

② في حالة $\alpha<0$ لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty}P_\alpha(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}P_\alpha(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0}\alpha\ln x=+\infty$.

في حالة $\alpha>0$ لدينا:

$\lim\limits_{x\to+\infty}P_\alpha(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}P_\alpha(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to0}\alpha\ln x=-\infty$.

ولأن $P_\alpha(0)=0$ كان $\lim\limits_{x\to0}P_\alpha(x)=P_\alpha(0)=0$ ومنه P_α مستمراً على $[0,+\infty[$.

(2) ① التابع اشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ لأن التابع $u : x\mapsto\alpha\ln x$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$P'_\alpha(x)=u'(x)e^{\alpha\ln x}=\frac{\alpha}{x}e^{\alpha\ln x}$$
$$=\alpha e^{-\ln x}e^{\alpha\ln x}=\alpha e^{(\alpha-1)\ln x}=\alpha P_{\alpha-1}(x)$$

② في حالة $0<\alpha<1$ لدينا

$$t(x)=\frac{P_\alpha(x)-P_\alpha(0)}{x}=x^{\alpha-1}$$

ولأن $\alpha-1<0$ نلاحظ

$$\lim_{x\to0}t(x)=\lim_{x\to0}\frac{P_\alpha(x)-P_\alpha(0)}{x}=\lim_{x\to0}x^{\alpha-1}=+\infty$$

فالتابع ليس اشتقاقياً في هذه الحالة عند الصفر.

③ أما في حالة $\alpha>1$ فلدينا

$$t(x)=\frac{P_\alpha(x)-P_\alpha(0)}{x}=x^{\alpha-1}$$

ولأن $\alpha-1>0$ نستنتج أن

$$\lim_{x\to0}t(x)=\lim_{x\to0}\frac{P_\alpha(x)-P_\alpha(0)}{x}=\lim_{x\to0}x^{\alpha-1}=0$$

فالتابع P_α اشتقاقي عند الصفر ومشتقه معدوم عند الصفر.

ومنه العلاقة $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ صحيحة في هذه الحالة على $[0,+\infty[$.

(3) في حالة $x>0$ لدينا

$$P_\alpha(P_\beta(x))=\exp\left(\alpha\ln(e^{\beta\ln x})\right)=\exp\left(\alpha\beta\ln x\right)=P_{\alpha\beta}(x)$$

وهي تكتب بالصيغة المألوفة $(x^\beta)^\alpha=x^{\alpha\beta}$.

(4) في حالة $\alpha>0$ لدينا $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$، ولكن $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

ولأن $x^\alpha\ln x=-\dfrac{\ln t}{t^\alpha}$ حيث $t=\dfrac{1}{x}$ فإن $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha\ln x=-\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t^\alpha}=0$.

ولدينا أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ إذن في حالة $\alpha>0$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x/\alpha}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{e^{x/\alpha}}{x/\alpha}=+\infty$.

ولأن $\lim\limits_{X\to+\infty}P_\alpha(X)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha=+\infty$ وهذا يكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^x}=0$.

[46] ليكن f التابع المعرّف على $]-1,+\infty[$ بالصيغة $f(x)=\ln(1+x)-x$. نعلم أنّ $\ln(1+x)\le x$.

a) أثبت أنّ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\le e\le\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ (*)

b) ليكن n عدداً طبيعياً موجباً تماماً. وليكن g و h التابعين المعرّفين على $[0,1]$ وفق

$$g(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$
$$h(x)=g(x)+e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}$$

وادرس اطراد كلٍّ من التابعين g و h على $[0,1]$، واستنتج أنّ $h(1)\ge1\ge g(1)$.

c) استنتج أنّ

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le e\le1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n\cdot(n!)}\qquad(**)$$

d) لنتأمّل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(v_n)_{n\geq1}$ الآتيتين: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و $v_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$. أثبت أنّ $0\leq e-u_n\leq\frac{u_n}{n}\leq\frac{3}{n}$ بالاعتماد على (*). ثم استنتج من (**) أنّ $0\leq e-v_n\leq\frac{1}{n(n!)}$.

e) أيُّ المتتاليتين أفضل لحساب تقريب للعدد e؟

الحل:

a) باختيار $x=\frac{1}{n}$ في المتراجحة $\ln(1+x)\leq x$ نستنتج أنّ $\ln(1+\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}$ أي $\ln((1+\frac{1}{n})^n)\leq1$ ومنه $(1+\frac{1}{n})^n\leq e$. ثُمّ باختيار $x=\frac{-1}{n+1}$ في المتراجحة نفسها نجد $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\leq-\frac{1}{n+1}$ وهذا يُكافئ $\ln(\frac{n}{n+1})\leq-\frac{1}{n+1}$ أو $\frac{1}{n+1}\leq-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ أي $1\leq\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ومن ثَمّ $e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. فنكون قد أثبتنا صحة (*).

b) نلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned}g'(x)&=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'\\&\quad-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\\&=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)\\&\quad-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)\\&=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\end{aligned}$$

أي $g'(x)$ سالب على $[0,1]$ فالتابع g متناقصٌ على $[0,1]$.

من ناحية أخرى، لأنّ $h(x)=g(x)+e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}$ ومنه

$$\begin{aligned}h'(x)&=g'(x)-e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}+\frac{(n+1)x^n}{n(n!)}e^{-x}\\&=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}-e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}+\frac{(n+1)x^n}{n(n!)}e^{-x}\\&=\frac{x^ne^{-x}}{n(n!)}(-n-x+n+1)=\frac{x^ne^{-x}}{n(n!)}(1-x)\end{aligned}$$

أي $h'(x)$ موجبٌ على $[0,1]$ فالتابع h متزايدٌ على المجال $[0,1]$.

ومنه $h(1)\geq h(0)=1=g(0)\geq g(1)$

c) تنتج المتراجحة (**) من $h(1)\geq1\geq g(1)$ بضرب الطرفين بالعدد e.

d) من (*) نجد $0\leq e-u_n\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}u_n$.

وتنتج المتراجحة المطلوبة من ملاحظة أنّ $u_n\leq e<3$ أو $u_n\leq e\leq\left(1+\frac{1}{5}\right)^6<3$.

e) فإذا أردنا حساب e لثلاثة أرقام بعد الفاصلة أي بخطأ أصغر تماماً من 10^{-3} علينا حساب u_{3000}، في حين يكفي أن نحسب v_6 لنحصل على المطلوب. إذن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ أسرع تقارباً من $(u_n)_{n\geq1}$ نحو العدد e.

التكامل المحدد والتابع الأصلي

1. التابع الأصلي:

لإثبات أن F تابع أصلي للتابع f المعرف على D نثبت أن:

ⓐ F اشتقاقي على D .

ⓑ $F'(x) = f(x)$.

مثال1: $F : x \mapsto x^3 + 1$ تابعٌ أصلي لـ $f : x \mapsto 3x^2$ على $\mathbb{R}$.

لأن F اشتقاقي على $\mathbb{R}$. و $F'(x) = 3x^2 = f(x)$

مثال2: $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x-1} + 3$ تابعٌ أصلي للتابع $f : x \mapsto e^{2x-1}$ على المجال $]-\infty, 0[$.

لأن F اشتقاقي على $]-\infty, 0[$. و $F'(x) = e^{2x-1} = f(x)$

مثال3: أيكون التابعان F و G تابعين أصليين لـ f ذاته على $\mathbb{R}$؟

$F(x) = \sin(3x) - 2\sin x$ و $G(x) = \sin x - 3\sin^3 x$.

الحل: لكي يكون F و G تابعان أصليان للتابع f ذاته يجب أن يكون

$$F'(x) = 3\cos(3x) - 2\cos x = f(x)$$

$$G'(x) = \cos x - 9\sin^2 x \cos x = f(x)$$

بالتجريب نجد $F'(\frac{\pi}{6}) - G'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \neq 0$. إذن الجواب هو لا.

[1] تحقّق أنَّ F تابع أصلي للتابع f على I:

$$f(x) = \tan^2 x, F(x) = \tan x - x, I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

الحل:

[2] تحقّق أنَّ F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I.

ⓐ $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$, $G(x) = \dfrac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$, $I =]1, +\infty[$

ⓑ $F(x) = \sin^2 x$, $G(x) = 2 - \cos^2 x$, $I = \mathbb{R}$

الحل:

2. قواعد التابع الأصلي:

$\alpha h \to \alpha H$	$x^n \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$0 \to k \ , a \to ax$
$h \times h' \to \dfrac{(h)^2}{2}$	$\dfrac{h'}{h} \to \ln\|h\|$	$h_1 \pm h_2 \to H_1 \pm H_2$

مثال4: $f(x) = -3$ له تابع أصلي $F(x) = -3x$

◆ $f(x) = x^3$ له تابع أصلي $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$

◆ $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 5}$ له تابع أصلي $F(x) = \ln|x^2 + 5| = \ln(x^2 + 5)$

◆ $f(x) = 5x^2 - 5x + 7$ له تابع أصلي $F(x) = 5\dfrac{x^3}{3} - 5\dfrac{x^2}{2} + 7x$

[3] جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$:

ⓐ $f(x) = -2$ ⓑ $f(x) = x^3$ ⓒ $f(x) = 5x^6$

ⓓ $f(x) = x^{-3}$ ⓔ $f(x) = x^5 + x^3$ ⓕ $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

ⓖ $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 2}$ ⓗ $f(x) = 2x(x^2 + 1)$ ⓘ $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$

الحل:

....

....

....

....

....

....

3. قواعد التابع الأصلي للتوابع:

يوجد ثلاث حالات:

1) إذا كان التابع **بسيط** (أي حشوته x) نتبع القواعد:

$(x)^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sin(x) \to -\cos(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x} \to \tan(x)$
$e^x \to e^x$	$\cos(x) \to \sin(x)$	$\frac{1}{\sin^2 x} \to -\cot(x)$

(مسكة مكنسة: مشتق الساين كوساين وتكامل الكوساين ساين)

2) إذا كانت حشوة التابع <u>**درجة أولى**</u> نكامله كأنه بسيط ونضرب الناتج بـ $\frac{1}{a}$ (حيث a أمثال x) أي:

$(ax+b)^n \to \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$e^{ax+b} \to \frac{1}{a}e^{ax+b}$
$\sin(\alpha x+\beta) \to -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x+\beta)$	$\cos(\alpha x+\beta) \to \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x+\beta)$
$\frac{1}{\cos^2 ax} \to \frac{1}{a}\tan(ax)$	$\frac{1}{\sin^2 ax} \to \frac{-1}{a}\cot(ax)$

3) إذا كانت حشوة التابع <u>**شيء**</u> نشترط أن يكون التابع الذي نوجد التابع الأصلي له مضروب بمشتق حشوته عندئذ نحذف مشتق الحشوة ونكامله كأنه بسيط أي:

$h^n.h' \to \frac{h^{n+1}}{n+1}$	$h'\sin(h) \to -\cos(h)$	$h'\frac{1}{\cos^2 h} \to \tan(h)$
$h'e^h \to e^h$	$h'\cos(h) \to \sin(h)$	$h'\frac{1}{\sin^2 h} \to -\cot(h)$

مثال5: $f(x)=x^3$ له تابع أصلي $F(x)=\frac{x^4}{4}$

- ♦ $f(x)=(2x-5)^3$ له تابع أصلي $F(x)=\frac{1}{2}\frac{(2x-5)^4}{4}$
- ♦ $f(x)=10x^4(2x^5-1)^3$ له تابع أصلي $F(x)=\frac{(2x^5-1)^4}{4}$
- ♦ $f(x)=\cos x$ له تابع أصلي $F(x)=\sin x$
- ♦ $f(x)=\cos(3x+2)$ له تابع أصلي $F(x)=\frac{1}{3}\sin(3x+2)$
- ♦ $f(x)=3x^2\cos(x^3+7)$ له تابع أصلي $F(x)=\sin(x^3+7)$

[4] جد تابعاً أصلياً F للتابع f .

ⓐ $f(x)=\cos x$ ⓑ $f(x)=\cos 3x$ ⓒ $f(x)=3x^2\cos(x^3)$

ⓓ $f(x)=\sin x$ ⓔ $f(x)=\sin 2x$ ⓕ $f(x)=-\frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$

ⓖ $f(x)=e^x$ ⓗ $f(x)=e^{2x-1}$ ⓘ $f(x)=2xe^{x^2-1}$

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

سما المجد التعليمية

♣نسمي F تابع أصلي للتابع f ونقول $x \mapsto F(x)+k$ مجموعة جميع التوابع الاصلية للتابع f

♣إذا كان التابع مستمر على مجال الدراسة I وجد التابع الأصلي.

[5] هاتِ تابعاً أصلياً F للتابع f على I حدده ويحقق الشرط.

ⓐ $f(x)=x^2+x$, $\quad F(1)=0$,

ⓑ $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$, $\quad F(\frac{\pi}{2})=0$,

ⓒ $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$, $\quad F(\frac{\pi}{2})=0$,

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. طرق التحويل الى قاعدة: (غلباً وليس دائماً)

♣عند وجود جذر نحول الجذر الى أس: $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$.

♣عند وجود أس مقام لا يساوي 1 نرفع المقام الى البسط مع تغير اشارة الأس واذا كان أس المقام واحد نستعمل قاعدة اللوغاريتم $\frac{h'}{h}$.

♣يمكن استعمال المطابقات التربيعية أو التكعيبية أو فك الأقواس.

♣في التابع الكسري: إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام قسمة إقليدية ويمكن أن نوزع البسط على المقام في حالة أن المقام حد واحد.

♣احياناً نضرب بعدد ونقسم عليه.

♣عند وجود عدد نسحبه عامل مشترك (إذا عندك عدد زتو بره)

♣عند وجود أس على تابع مثلثي نستعمل أويلر أو يمكن نستعمل:

-

مثال6: أوجد تابع أصلي فيما يأتي:

♦ $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x)=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$

♦ $f(x)=\dfrac{1}{(2x-3)^5}=(2x-3)^{-5}$

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{(2x-3)^{-4}}{-4}=-\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{(2x-3)^4}$

♦ $f(x)=\sin 3x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}[\sin(4x)+\sin(2x)] \Rightarrow$

$F(x)=\dfrac{1}{2}[-\dfrac{1}{4}\cos(4x)-\dfrac{1}{2}\cos(2x)]$

♦ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\times e^{-\frac{2}{x}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{x^2}\times e^{-\frac{2}{x}} \Rightarrow F(x)=\dfrac{e^{-2/x}}{2}$

♦ $f(x)=\dfrac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3}=(1-2x)(2x^2-2x+1)^{-3}$

$=\dfrac{1}{-2}(4x-2)(2x^2-2x+1)^{-3} \Rightarrow$

$F(x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{(2x^2-2x+1)^{-2}}{-2}=\dfrac{1}{4(2x^2-2x+1)^2}$

♣بعد ايجاد التكامل عند وجود أس سالب يرد الى المقام وعند وجود كسر في الأس يُرد الى الجذر وعند وجود سالب في المقام نضعه أمام الكسر وعند وجود كسر في المقام نضعه أمام الكسر بعد قلبه.

[6] جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

ⓐ $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}$, $\quad I=]0,+\infty[$,

ⓑ $f(x)=(2x-1)^3$, $\quad I=\mathbb{R}$,

ⓒ $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-2x}}$, $\quad I=]-\infty,\frac{1}{2}[$,

ⓓ $f(x)=\dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$, $\quad I=]-1,3[$,

ⓔ $f(x)=\dfrac{1}{(1-3x)^2}$, $\quad I=]-\infty,\frac{1}{3}[$,

ⓕ $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$, $\quad I=]1,+\infty[$,

الحل:

....

....

....

....

....

....

[7] جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

ⓐ $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3$, $I = \mathbb{R}$,

ⓑ $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, $I =]0, +\infty[$

ⓒ $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $I =]-\infty, 0[$

ⓓ $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x + x^2}$, $I =]1, +\infty[$

ⓔ $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$

ⓕ $f(x) = \dfrac{4x - 2}{\sqrt{x^2 - x}}$, $I =]1, +\infty[$

ⓖ $f(x) = \dfrac{5}{4x - 3}$, $I =]-\infty, \frac{3}{4}[$

ⓗ $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$, $I =]-\infty, 2[$

ⓘ $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x}$, $I =]0, +\infty[$

ⓙ $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2x - 1}$, $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$

الحل:

5. قواعد التابع الأصلي للتوابع المثلثية

♣عند وجود أس على تابع مثلثي نستعمل أويلر أو خواص تخفيض القوة

♣يمكن تحويل الجداء الى مجموع في التوابع المثلثية وفق الآتي:

- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$
- (في حالة $\cos a \sin b$ نبدل $\sin b \cos a$)
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$
- $\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$

$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	$\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
$\cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$	$\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$

[8] جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

ⓐ $f(x) = \sin x \cos x$, $I = \mathbb{R}$

ⓑ $f(x) = \sin^2 x$, $I = \mathbb{R}$

ⓒ $f(x) = \cos^2 3x$, $I = \mathbb{R}$

ⓓ $f(x) = \cos^4 x$, $I = \mathbb{R}$

ⓔ $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$, $I = \mathbb{R}$

ⓕ $f(x) = \cot^2 x$, $I =]0, \pi[$

ⓖ $f(x) = \tan x$, $I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

ⓘ $f(x) = \cot x$, $I =]0, \pi[$

الحل:

....

6. التكامل المحدّد

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$
$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

مثال7:

ⓐ $I = \int_0^1 (2x+3)dx = \left[x^2 + 3x\right]_0^1 = 4$

ⓑ $I = \int_0^2 \frac{2}{x-3}dx = \int_0^2 2\frac{1}{x-3}dx = \left[2\ln(3-x)\right]_0^2 = -2\ln 3$

ⓒ $I = \int_0^2 \left|x^2 - 1\right| dx = \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = 2$$

[9] احسب التكاملات الآتية:

ⓐ $I = \int_0^2 \sqrt{2x+1}\,dx$ ⓑ $I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

ⓒ $I = \int_2^{-1} (x^2 - 4x + 3)dx$ ⓓ $I = \int_1^e \frac{1}{t}\ln t\,dt$

ⓔ $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$ ⓕ $I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

ⓖ $I = \int_2^e \frac{1}{t\ln t}dt$ ⓗ $I = \int_0^1 te^{t^2-1}dt$

ⓘ $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\,dx$ ⓙ $x|x-1|dx$

الحل:

....

7. التكامل المحدد بالتجزئة

نستخدم التكامل بالتجزئة لإيجاد تكامل كثير الحدود مضروب تابع حشوة درجة أولى (مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية أو جذرية) أو أحياناً جداء تابعي حشوة درجة أولى. حيث نفرض اللوغاريتم u والأخر v' وفي حال عدم وجود اللوغاريتم نفرض كثير الحدود u.	<table><tr><th>u</th><th>v'</th></tr><tr><td>x^n</td><td>e</td></tr><tr><td>x^n</td><td>$\sin,\cos$</td></tr><tr><td>x^n</td><td>$\sqrt{ax+b},\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$</td></tr><tr><td>$\ln$</td><td>$1,\sqrt{x},x^r:r\neq -1$</td></tr><tr><td>$\sin$</td><td>$e$</td></tr></table>

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

التكامل بالتجزئة = جداء التابعين الاصليين – تكامل جداء الجديدين.

مثال8: احسب التكامل المحدّد $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$.

اشتقاق			تابع أصلي
	$u=x$	$v'=e^{-x}$	
	$u'=1$	$v=-e^{-x}$	

$$I=\left[x(-e^{-x})\right]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx=-e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=\frac{e-2}{e}$$

♣ في حالة خاصة نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب تكامل $\ln x$.

♣الأولية للفرض: $\boxed{v'}:e\to\sin,\cos$, $\boxed{u}:\ln\to x$.

[10] احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

ⓐ $I=\int_1^e x\ln x\,dx$ ⓑ $J=\int_0^\pi (x-1)\cos x\,dx$

ⓒ $K=\int_0^1 (x+2)e^x\,dx$ ⓓ $J=\int_0^1\frac{2x-1}{(x+2)^2}dx$

ⓔ $M=\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$ ⓕ $I=\int_1^e \ln x\,dx$

الحل:

سما المجد التعليمية

[11] (دورة 2 − 2021) احسب التكامل الآتي $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

الحل:

♣ عند إيجاد تابع أصلي بطريقة التكامل بالتجزئة نستعمل
$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \ : a\in D$$

[12] جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$

ⓐ $f(x)=x\cdot\cos x$ ⓑ $f(x)=x^2\cdot\ln x$

ⓒ $f(x)=x^2\cdot e^x$ ⓓ $f(x)=x^2\cdot\sin 2x$

الحل:

المجد التعليمية

8. تفريق الكسور

♣**نستخدم تفريق الكسور:** عند تحقق الشروط:

- △ تابع كسري درجة بسطه أصغر تماماً من درجة مقامه.
- △ المقام جداء عوامل درجة أولى غير مكررة.

♣**طريقة تفريق الكسور:**

- △ نحلل المقام إلى عوامل درجة أولى.
- △ نفرض $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}=\dfrac{....}{(x-a)(x-b)}$
- △ نوجد مقامات ثم نفرض $x=a$ ثم نفرض $x=b$.

مثال9: احسب التكامل $I=\int_0^1 \dfrac{1}{x^2-x-2}dx$.

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

نضرب بالمقام المشترك: $1=a(x-2)+b(x+1)$

نعوض $x=-1$ نجد $a=-\dfrac{1}{3}$ ونعوّض $x=2$ نجد $b=\dfrac{1}{3}$.

أي $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}=-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x-2}$

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[\ln|x-2|\Big]_0^1-\frac{1}{3}\Big[\ln|x+1|\Big]_0^1=-\frac{2}{3}\ln 2$$

♣إذا كانت درجة البسط أكبر من المقام نقسم قسمة اقليدية.

[13] جد تابعاً أصلياً للتابع $f:x\mapsto f(x)$ على المجال I .

ⓐ $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$, $I=]1,+\infty[$

ⓑ $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x-6}$, $I=]-2,3[$

ⓒ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+x}$, $I=]-1,0[$

ⓓ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$ $I=]2,+\infty[$

الحل:

[14] f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق $f(x)=\dfrac{4x^2-5x+1}{x+3}$.

ⓐ جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+3}$.

ⓑ احسب $J=\int_{2}^{0} f(x)\,dx$.

الحل:

[15] f التابع المعرف على $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

ⓐ جد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$.

ⓑ احسب $J=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$.

الحل:

سما المجد التعليمية

♣ يمكن مكاملة طرفي متراجحة بشرط أن تكون حدود التكامل من الأصغر إلى الأكبر.

أي إذا كان $a<b$، وكان $f \ge g$ على $[a,b]$ كان $\int_a^b f \ge \int_a^b g$.

مثال10: أثبت أن $\sin x \le x$ في حالة $x>0$

الحل:

نعلم أن $cos\ t \le 1$ وفي حالة $x>0$

$$\int_0^x \cos t\, dt \le \int_0^x 1\, dt \Rightarrow$$

$$[\sin t]_0^x \le [t]_0^x$$

$$\sin x - \sin 0 \le x$$

$$\sin x \le x$$

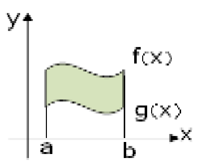
[16] لدينا أن $1-\frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$، أيا يكن $x \in \mathbb{R}$.

ⓐ بين أن $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$، أيا يكن $x \ge 0$.

ⓑ استنتج نهاية $\frac{x-\sin x}{x^2}$ عندما يسعى x إلى الصفر.

الحل:

9. المساحة:



♣المساحة تساوي تكامل من اليسار إلى اليمين للتابع الأعلى ناقص التابع الأدنى.

أي $$S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\ dx$$

♣ناتج المساحة والحجم دائماً موجب تماماً.

♣عند إيجاد المساحة يجب معرفة اليمين واليسار والأعلى والأدنى.

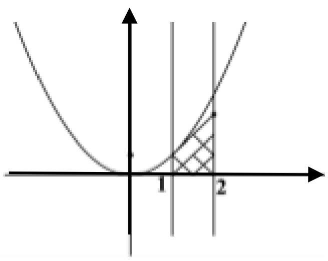
♣عند عدم معرفة اليمين أو اليسار نجد الحل المشترك للأعلى والأدنى.

♣عند عدم معرفة الأعلى والأدنى نضع قيمة مطلقة أي:

$$S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\ dx$$

مثال11: ليكن التابع $f(x)=x^2$ احسب المساحة للسطح المحصور بين الخط C والمحور Ox والمستقيمين $x=1$ و $x=2$.

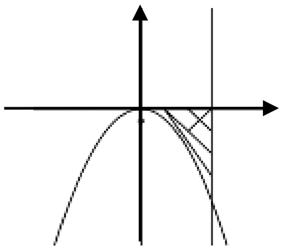
الحل:



$$S=\int_1^2 f(x)-0\,dx=\int_1^2 x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

مثال13:12 ليكن التابع $f(x) = -x^2$ احسب المساحة بين الخط البياني والمحور Ox والمستقيم $x = 1$



الحل:

$$S = \int_0^1 0 - f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

مثال13: ليكن $C : f(x) = x^2$ و $\Delta : y = 2x + 3$ احسب المساحة المحصورة بين C و Δ ؟

الحل: نوجد نقاط التقاطع بالحل المشترك للمعادلتين

$y = x^2$ و $y = 2x + 3$

$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

او $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$S = \int_{-1}^{3} \left|x^2 - 2x - 3\right| dx = \int_{-1}^{3} -x^2 + 2x + 3\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

[17] ليكن التابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ احسب المساحة للسطح المحصور بين الخط C والمحور Ox والمستقيمين $x = 2$ و $x = 5$.

الحل:

....

[18] ليكن التابع $f(x) = e^x$ احسب المساحة للسطح المحصور بين الخط C والمحور Ox والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

الحل:

....

[19] ليكن التابع $f(x) = \ln x$ احسب المساحة بين الخط البياني والمحور Ox والمستقيم $x = e$.

الحل:

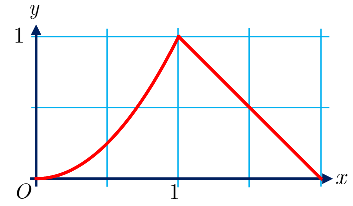
....

♣ نرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a و b.

نرمز $\max(a,b)$ إلى أكبر العددين a و b.

[20] f المعرّف على $[0,2]$ وفق $f(x)=\min(x^2,2-x)$.

احسب التكامل $\int_0^2 f(x)dx$، وقلْ ماذا يمثل هذا العدد ؟

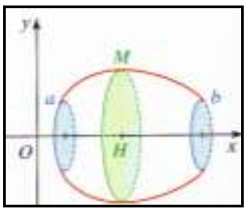


الحل:

10. الحجم:

♣يعطى الحجم بالقاعدة:

$$\boxed{V=\int_a^b A(t)\,dt}$$



حيث

△ a,b مسقط طرفي المجسم على أحد المحاور.

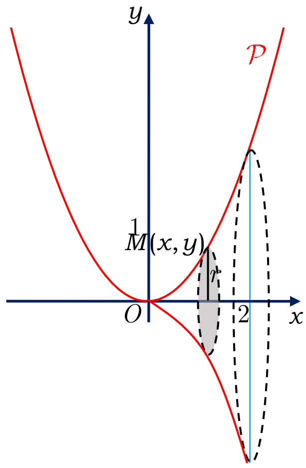
△ t مجهول المحور الذي اسقطنا عليه.

△ $A(t)$ مساحة مقطع المجسم بمستو يعامد المحور الذي اسقطنا عليه.

و هو غالباً دائرة مساحتها $S=\pi r^2$.

مثال14: احسب الحجم الناتج عن دوران الخط البياني C حول محور Ox دورة كاملة على المجال $[0,2]$

$f(x)=x^2$



الحل: نقطع المجسم بمستوٍ يعامد المحور Ox فيكون المقطع الناتج دائرة ولتكن $M(x,y)$ نقطة من الخط C.

$$A(x)=\pi\ r^2=\pi\ y^2$$
$$=\pi\ (x^2)^2=\pi x^4$$
$$V=\int_a^b A(t)dt\ =\int_0^2 \pi x^4\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{32\pi}{5}$$

مثال15: f التابع المعرف على $D=[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x}$

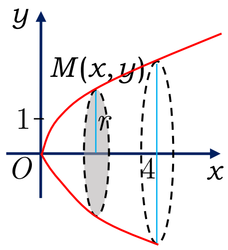
ⓐ احسب الحجم الناتج عن دوران الخط البياني C حول محور Ox دورة كاملة على المجال $[0,4]$.

ⓑ احسب الحجم الناتج عن دوران السطح المحصور بين الخط البياني C والمحور Oy والمستقيم $y=1$ حول Oy دورة كاملة .

الحل:

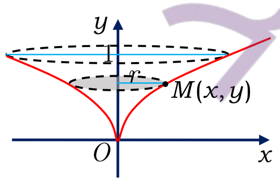
ⓐ نقطع المجسم بمستوٍ يعامد المحور Ox فينتج مقطع هو دائرة.

لتكن $M(x,y)$ نقطة من الخط C.



$$A(x)=\pi\ r^2$$
$$=\pi\ y^2=\pi\ (\sqrt{x})^2$$
$$=\pi x$$
$$V=\int_a^b A(t)dt\ =\int_0^4 \pi x\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi$$

ⓑ نقطع المجسم بمستوٍ يعامد المحور Oy فيكون المقطع الناتج دائرة ولتكن $M(x,y)$ نقطة من الخط C.

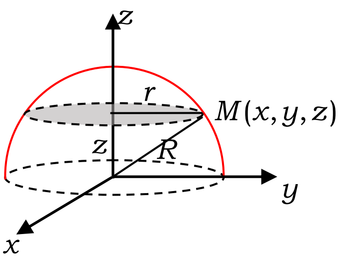


$$A(y)=\pi\ r^2=\pi\ x^2$$
$$=\pi\ (y^2)^2=\pi y^4$$

حيث $y=\sqrt{x}\Rightarrow y^2=x$

$$V=\int_a^b A(t)dt\ =\int_0^1 \pi y^4\,dy=\pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{5}$$

مثال16: احسب حجم كرة نصف قطرها R .



الحل: نقطع المجسم بمستوٍ يعامد المحور Oz فيكون المقطع الناتج دائرة ولتكن $M(x,y)$ نقطة من الخط C.

$A(z)=\pi r^2$ بحسب مبرهنة فيثاغورث : $r^2+z^2=R^2$

ومنه $r^2=R^2-z^2$ أي $A(z)=\pi\left(R^2-z^2\right)$

$$\mathcal{V}=\int_a^b A(z)\,dz=\int_0^R \pi\left(R^2-z^2\right)dx$$

$$=\left[\pi\left(R^2z-\frac{z^3}{3}\right)\right]_0^R=\frac{2\pi}{3}R^3$$

وهو حجم نصف الكرة فيكون حجم الكرة $V=\frac{4\pi}{3}R^3$

[21] ليكن التابع $f(x)=e^x$ احسب الحجم الناتج عن دوران السطح المحصور بين الخط C والمحور Ox والمستقيمين $x=1$ و $x=e$. حول المحور Ox دورة كاملة.

الحل:

[22] ليكن التابع $f(x)=\sin x$

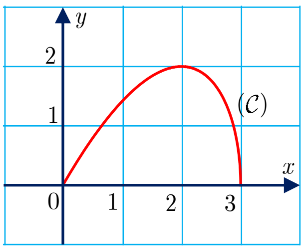
ⓐ ارسم الخط البياني على المجال $[0,\pi]$

ⓑ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمحور Ox.

ⓒ احسب الحجم الناتج عن دوران الخط البياني C حول محور Ox دورة كاملة على المجال $[0,\pi]$.

الحل:

[23] في الشكل المجاور $(\mathcal{C})$ هو الخط للتابع f المعرف على المجال $[0,3]$ بالصيغة: $f(x)=x\sqrt{3-x}$. عندما يدور $(\mathcal{C})$ دورة كاملة حول محور الفواصل يولّد مجسماً دورانياً S.



1. ما طبيعة مقطع المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ حيث $x\in]0,3[$ ؟
2. عيّن $A(x)$ مساحة المقطع، ثمّ استنتج V حجم المجسم S.

الحل:

تمارين عامة

[24] أثبت أنّ $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ ، واستنتج $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

الحل:

[25] (دورة 1 – 2018) ليكن $I = \int_0^{\ln 2} \frac{2}{2+e^x}\,dx$.

احسب $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$ ، ثُم $I+J$ ، واستنتج I .

الحل:

سما المجد التعليمية

[26] ليكن $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$ و $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ ،

احسب J ثُم $I+J$ ، واستنتج I

الحل:

[27] نضع: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$

ⓐ احسب $I+J$.

ⓑ تحقق أن $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx$

ⓒ احسب $I-J$ ثم استنتج قيمة كل من I و J .

الحل:

[28] ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{2x}\cos x$.

ⓐ احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

ⓑ عيّن عددين a و b يحققان المساواة $f(x) = af'(x) + bf''(x)$

ⓒ استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل:

سما المجد التعليمية

[29] ليكن التابع f المعرفة على $]0,\infty[$ وفق $f(x)=x-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

ⓐ برهن $g(x)=\frac{x^2}{2}-x+x\ln x$ تابع أصلي على $]0\ ,+\infty[$

ⓑ جد ناتج $I=\int_1^e x-\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx$

الحل:

[30] احسب $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

الحل:

[31] ليكن f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(2-x)e^x$

ⓐ ادرس تغيرات f وارسم C.

ⓑ احسب مساحة الجزء S المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=2$، والخط C ومحور الفواصل.

ⓒ عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $G: x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto(f(x))^2$.

ⓓ عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنّه يولّد مجسماً دورانياً حجمه V استنتج قيمة V.

الحل:

سطا المجد التعليمية

تمارين عامة محلولة

[32] احسب $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^4 x\,dx$.

الحل: لدينا $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ ومنه

$$\sin^4 x=\tfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)$$

ولكن $\cos^2 2x=\frac{1}{2}(1+\cos 4x)$ ومنه

$$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

ومنه $I=\left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi/8}=\frac{3\pi}{64}+\frac{1-4\sqrt{2}}{32}$

[33] ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{2x}\sin x$.
عيّن تابعاً أصلياً F للتابع f .

الحل: ليكن $F(x)=\int_0^x e^{2t}\sin t\,dt$ بإجراء مكاملة بالتجزئة نجد

$u=\sin t$	$v'=e^{2t}$
$u'=\cos(t)$	$v=\frac{1}{2}e^{2t}$

$$F(x)=\int_0^x e^{2t}\sin t\,dt=\left[\frac{e^{2t}}{2}\sin t\right]_0^x-\int_0^x\frac{e^{2t}}{2}\cos t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\boxed{\frac{1}{2}\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt}$$

بإجراء مكاملة بالتجزئة من جديد نجد

$u=\cos t$	$v'=e^{2t}$
$u'=-\sin t$	$v=\frac{1}{2}e^{2t}$

$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{2t}}{2}\cos t\right]_0^x-\int_0^x\frac{e^{2t}}{2}(-\sin t)dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\int_0^x e^{2t}\sin t\,dt$$

أي $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}F(x)$

ومنه $F(x)=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+\frac{1}{5}$

طريقة ثانية. نلاحظ أن

$$f(x)=e^{2x}\sin x$$
$$f'(x)=e^{2x}(\cos x+2\sin x)$$
$$f''(x)=e^{2x}(4\cos x+3\sin x)$$

بحذف الحد الذي يحوي $\cos x$ من $f'(x)$ و $f''(x)$ فنجد

$$4f'(x)-f''(x)=5e^{2x}\sin x=5f(x)$$

ومنه $f(x)=\frac{4}{5}f'(x)-\frac{1}{5}f''(x)=\left(\frac{4}{5}f(x)-\frac{1}{5}f'(x)\right)'$

أي $\frac{4}{5}f(x)-\frac{1}{5}f'(x)=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)$ هو تابع أصلي للتابع f .

[34] f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(1+x+x^2+x^3)e^{-x}$.
أيوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F:x\mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$

الحل: نفترض وجود كثير حدود P بحيث يكون $F(x)=P(x)e^{-x}$ تابع أصلي للتابع f عندئذ من $F'(x)=f(x)$ ولكن $F'(x)=\left(P'(x)-P(x)\right)e^{-x}$ ومنه

أي $\left(P'(x)-P(x)\right)e^{-x}=(1+x+x^2+x^3)e^{-x}$

$$(1)\quad P'(x)-P(x)=1+x+x^2+x^3$$

ولكن درجة P' أصغر تماماً من درجة P أي درجة الطرف الأيسر تساوي درجة P ونلاحظ درجة الطرف الأيمن تساوي 3. ومنه تكون درجة P هي 3. لذلك نفترض أن

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

بالتعويض في (1) نجد

$$-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d=x^3+x^2+x+1$$

ومنه $c-d=1,2b-c=1,3a-b=1,a=-1$

أي $d=-10,c=-9,b=-4,a=-1$.

ومنه يوجد تابع كثير الحدود P يحقق $F(x)=P(x)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

[35] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sin^4 x$.

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$. واكتب $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 2x$.

② استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل: ① لدينا

$$f(x)=\sin^4 x$$
$$f'(x)=4\sin^3 x\cos x$$
$$f''(x)=12\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^4 x$$
$$=3\sin^2 2x-4f(x)=3\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}-4f(x)$$

② $f(x)=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}f''(x)=\left(\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}f'(x)\right)'$

ومنه $F(x)=\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x-\sin^3 x\cos x$

[36] جد تابعاً أصلياً للتابع f مستفيداً من $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

① $f(x)=\cos^3 x$ ② $f(x)=\sin x+\sin^3 x$

③ $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x$

الحل: ① $f(x)=\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x$ ومنه

$$F(x)=\sin x-\tfrac{1}{3}\sin^3 x$$

② $f(x)=\sin x+\sin^3 x=(1+\sin^2 x)\sin x=(\cos^2 x-2)\sin x$

إذن $F(x)=\frac{1}{3}\cos^3 x-2\cos x$

③ $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x=(\cos^4 x-\cos^2 x)\sin x$ ومنه

$F(x)=\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

[37] أوجد تابع أصلي فيما يأتي:

- $f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x^2}$

نخمن أن التابع الأصلي هو التابع $F(x)=-\dfrac{\ln x}{x}$ نثبت ذلك

$$F'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}=f(x)$$

- $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}$

نخمن أن التابع الأصلي هو التابع $F(x)=-\dfrac{\sin(x)}{x}$ نثبت ذلك

$$F'(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}=f(x)$$

- $f(x)=\dfrac{1}{\sin(2x)}=\dfrac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{2\sin(x)\cos(x)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$$

$$F(x)=-\frac{1}{2}\ln(\cos x)+\frac{1}{2}\ln(\sin x)=\frac{1}{2}\ln(\tan x)$$

- $f(x)=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{3x+2}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}=(3x+2)(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$$=(3x+3-1)(x+1)^{-\frac{1}{2}}=3(x+1)(x+1)^{-\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=3(x+1)^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F(x)=3\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}$$

$$=2(x+1)\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}=2x\sqrt{x+1}$$

[38] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3e^{2x}$، جد تابعاً أصلياً بالصيغة $F(x)=P(x)e^{2x}$، حيث P تابع كثير حدود.

الحل: نفترض وجود كثير حدود P بحيث يكون $F(x)=P(x)e^{2x}$ تابع أصلي للتابع f عندئذ من $F'(x)=f(x)$ ولكن

ومنه $F'(x)=\left(P'(x)+2P(x)\right)e^{2x}$

أي $\left(P'(x)+2P(x)\right)e^{2x}=x^3e^{2x}$ $P'(x)+2P(x)=x^3$ (1)

ولكن درجة P' أصغر تماماً من درجة P أي درجة الطرف الأيسر تساوي درجة P في حين درجة الطرف الأيمن تساوي 3. ومنه تكون درجة P هي 3. لذلك نبحث عن F بالصيغة $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}$. الشرط $F'(x)=f(x)$ يكافئ

$$(3ax^2+2bx+c)+2(ax^3+bx^2+cx+d)=x^3$$

أي $(2a-1)x^3+(2b+3a)x^2+2(c+b)x+2d+c=0$

ومنه $a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{3}{4},c=\dfrac{3}{4},d=-\dfrac{3}{8}$.

ومنه $F(x)=\frac{1}{8}(4x^3-6x^2+6x-3)e^{2x}$

[39] F و G تابعان أصليّان للتابعين $f:x\mapsto\cos(\ln x)$ و $g:x\mapsto\sin(\ln x)$ على $]0,+\infty[$، ينعدمان عند $x=1$. و

$$F(x)=\int_1^x\cos(\ln t)\,dt \quad \text{و} \quad G(x)=\int_1^x\sin(\ln t)\,dt$$

① أثبت أنَّ: $F(x)=x\cos(\ln x)-1+G(x)$

و $G(x)=x\sin(\ln x)-F(x)$.

② استنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$.

الحل: ① نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب $F(x)$

$u=\cos(\ln t)$	$v'=1$
$u'=-1/t\sin(\ln t)$	$v=t$

$$F(x)=\int_1^x\cos(\ln t)dt=\left[t\cos(\ln t)\right]_1^x-\int_1^x t(-\sin(\ln t))\frac{1}{t}dt$$

$$=x\cos(\ln x)-1+\int_1^x\sin(\ln t)dt$$

$$=x\cos(\ln x)-1+G(x)$$

ومنه $F(x)-G(x)=x\cos(\ln x)-1$

نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب $F(x)$

$u=\sin(\ln t)$	$v'=1$
$u'=1/t\cos(\ln t)$	$v=t$

$$G(x)=\int_1^x\sin(\ln t)dt=\left[t\sin(\ln t)\right]_1^x-\int_1^x t(\cos(\ln t))\frac{1}{t}dt$$

$$=x\sin(\ln x)-\int_1^x\cos(\ln t)dt=x\sin(\ln x)-F(x)$$

ومنه $F(x)+G(x)=x\sin(\ln x)$

$$\begin{cases}F(x)-G(x)=x\cos(\ln x)-1\\ F(x)+G(x)=x\sin(\ln x)\end{cases}$$

② وبالحل المشترك لجملة المعادلتين السابقتين (بالجمع والطرح) نجد

$$F(x)=\tfrac{1}{2}(x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-1)$$

$$G(x)=\tfrac{1}{2}(x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)+1)$$

[40] تيقّن أنّه في حالة $0<x<a$ يكون $\dfrac{1}{1+a}\le\dfrac{1}{1+x}\le 1$. ثم استنتج أنّ $\dfrac{a}{1+a}\le\ln(1+a)\le a$.

الحل: نشكل التابع $g:x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ بالاشتقاق $g'(x)\mapsto\dfrac{-1}{(1+x)^2}$

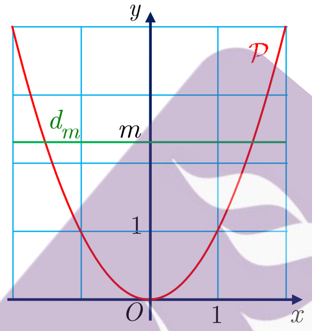
ومنه نجد متناقص على $\mathbb{R}_+$ ومنه في حالة $0<x<a$ لدينا $g(a)\le g(x)\le g(0)$.

في حالة $a>0$ لدينا $\displaystyle\int_0^a\frac{1}{1+a}dx\le\int_0^a\frac{1}{1+x}dx\le\int_0^a dx$

أي $\dfrac{a}{1+a}\le\ln(1+a)\le a$.

[41] ليكن $\mathcal{P}$ الخط البياني للتابع $x \mapsto x^2$ المعرف على المجال $[-2,2]$. المستقيم d_m الذي معادلته $y=m$ $(0 \le m \le 4)$ يقسم داخل جزء القطع المكافئ P إلى منطقتين. عند أية قيمة للوسيط m تتساوى مساحتا هاتين المنطقتين؟

الحل: $\mathrm{A}(m)$ مساحة الجزء من داخل القطع الذي يحده المستقيم d_m.



يقطع d_m القطع في النقطتين اللتين فاصلتاها $-\sqrt{m}$ و $\sqrt{m}$. وعليه

$$\mathrm{A}(m)=\int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}}(m-x^2)dx$$

$$=\frac{4}{3}m\sqrt{m}$$

يتحقق الشرط المعطى عند قيمة m التي تحقق $\mathrm{A}(m)=\frac{1}{2}\mathrm{A}(4)$ أي

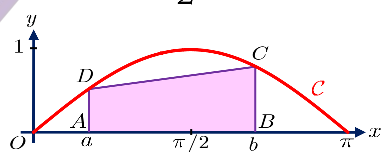
$$\frac{4}{3}m\sqrt{m}=\frac{16}{3}$$

$$m\sqrt{m}=4$$

$$m^3=16$$

$$m=2\sqrt[3]{2}$$

[42] نفترض أنَّ a و b عددان حقيقيان وأنَّ $0 \le a < b \le \pi$. أثبت صحة المتراجحة $\cos a-\cos b \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$.



الحل: نلاحظ أن $\int_a^b \sin t\,dt$ يمثل A مساحة السطح بين الخط البياني للتابع sin ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$

السطح يحوي شبه المنحرف $ABCD$

ومنه A أكبر أو يساوي مساحة $ABCD$.

ولكن $AD=\sin a$ و $BC=\sin b$

والارتفاع $AB=(b-a)$

$$S(ABCD)=\frac{\sin a+\sin b}{2}(b-a)$$

وهذا أكبر من $\frac{1}{2}(b-a)\sin b$ لأن $\sin a \ge 0$.

ومنه $\mathrm{A} \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$. ولكن $\mathrm{A}=\int_a^b \sin t\,dt=\cos a-\cos b$

ومنه صحة المتراجحة $\cos a-\cos b \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$.

– في حالة $a=0$ تصبح المتراجحة $1-\cos b \ge \frac{1}{2}b\sin b$ وهي تكافئ $\tan\frac{b}{2} \ge \frac{b}{2}$.

– أما في حالة $b=\pi$ تصبح المتراجحة $\cos a+1 \ge 0$.

[43] ارسم الخط البياني C الذي يُمثّل التابع f، ثمَّ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

① $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ $a=0, b=\frac{\pi}{4}$

② $f(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}$ $a=1, b=4$

③ $f(x)=(x+1)e^{-x}$ $a=-1, b=\ln 2$

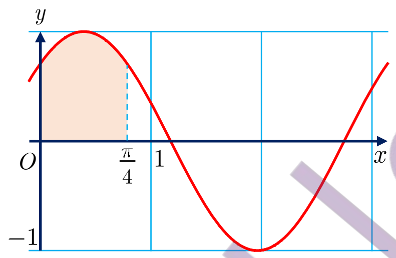
الحل: ① $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

التابع f دوري ويقبل العدد π دوراً. فتكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$.

$$f'(x)=-2\sin\left(2x-\tfrac{\pi}{4}\right)$$

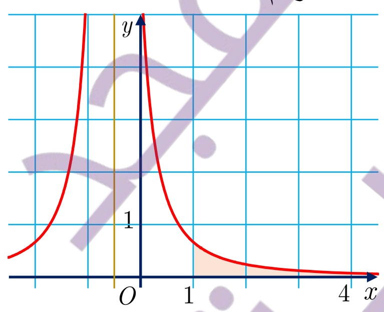
ينعدم $f'(x)$ عند $x=\frac{\pi}{8}$ و $x=\frac{5\pi}{8}$

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$



$s=\int_0^{\pi/4}\cos(2x-\frac{\pi}{4})dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

② بدراسة التغيرات نجد الرسم



ومنه $s=\int_1^4 \dfrac{6}{(1+2x)^2}dx=\dfrac{2}{3}$.

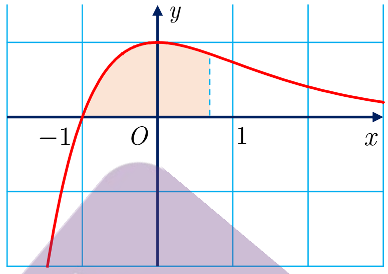
③ $f(x)=(x+1)e^{-x}$ التابع f معرف على $\mathbb{R}$ ويحقق

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

ومنه $y=0$ مقارب للخط البياني.

$f'(x)=-xe^{-x}$ فإشارته تعاكس إشارة x

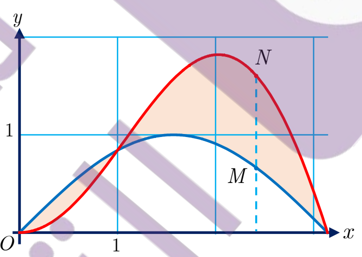
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$ 0



$$s=\int_{-1}^{\ln 2}(x+1)e^{-x}dx$$

$$=\left[-(x+1)\,e^{-x}\right]_{-1}^{\ln 2}+\int_{-1}^{\ln 2}e^{-x}dx=e-1-\tfrac{1}{2}\ln 2$$

[44] ارسم في جملة متجانسة الخطين البيانيين للتابعين $x\mapsto \sin x$ و $x\mapsto x\sin x$ على المجال $[0,\pi]$. ما مساحة السطح المحصور بين هذين الخطين على المجال $[0,\pi]$.



الحل: نعلم أن $x\mapsto \sin x$ تابع مرجعي ونعلم الخط البياني له على المجال $[0,\pi]$.

في حالة $0<x<1$ يمثل التابع $x\mapsto x\sin x$ عدد أصغر تماماً من الواحد مضروب بالتابع $x\mapsto \sin x$ فيعطي قيمة أصغر.

في حالة $1<x<\pi$ يمثل التابع $x\mapsto x\sin x$ عدد أكبر تماماً من الواحد مضروب بالتابع $x\mapsto \sin x$ فيعطي قيمة أكبر.

عند $x=0$ يكون $\sin x=x\sin x$ وكذلك عند $x=1$ يكون $\sin x=x\sin x$ وكذلك عند $x=\pi$ يكون $\sin x=x\sin x$

ويمكن إيجاد نقاط مساعدة مثل عند $\dfrac{\pi}{2}$ ومنه الرسم السابق.

$$\mathrm{A}=\int_0^1 \sin x-x\sin x\,dx+\int_1^{\pi}-\sin x+x\sin x\,dx$$

$$=\int_0^1(1-x)\sin x\,dx+\int_1^{\pi}(x-1)\sin x\,dx$$

$$=\left[(1-x)(-\cos x)\right]_0^1-\int_0^1\cos x\,dx+\left[(x-1)(-\cos x)\right]_1^{\pi}+\int_1^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=\pi-\left[\sin x\right]_0^1+\left[\sin x\right]_1^{\pi}=\pi-2\sin(1)$$

ليكن f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

① ادرس التابع وضع جدولاً بتغيراته، مبيّناً نهاياته عند $+\infty$ و $-\infty$.

② ليكن C' الخط البياني الذي يمثّل f. اكتب معادلة للمماس T للخط C' في النقطة Ω التي فاصلتها -1. وارسم C' و T.

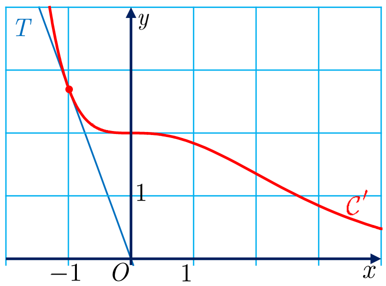
③ عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $F:x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$. ثمّ احسب $\mathrm{A}(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و C' والمستقيمين $x=0$ و $x=\alpha$.

الحل: ① $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

ومنه $y=0$ هو مستقيم مقارب

$f'(x)=(2+2x)e^{-x}-f(x)=-x^2e^{-x}$ ينعدم في حالة $x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	2	$\searrow$ 0



② لدينا $f(-1)=e$ و $f'(-1)=-e$ ومنه معادلة المماس T للخط C' في النقطة Ω التي فاصلتها -1 هي $y=-ex$.

③ $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ يجب أن يكون $F'(x)=f(x)$ أي $(a+1)x^2+(2+b-2a)x+2+c-b=0$

ومنه $a=-1,b=-4,c=-6$.

ومنه $F:x\mapsto(-x^2-4x-6)e^{-x}$ تابع أصلي للتابع f.

$$\mathrm{A}(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x)dx=F(\alpha)-F(0)=6-(\alpha^2+4\alpha+6)e^{-\alpha}$$

مسائل رسوم بيانية وجداول

1. مسائل حول الخط البياني للتابع f :

ملاحظات:

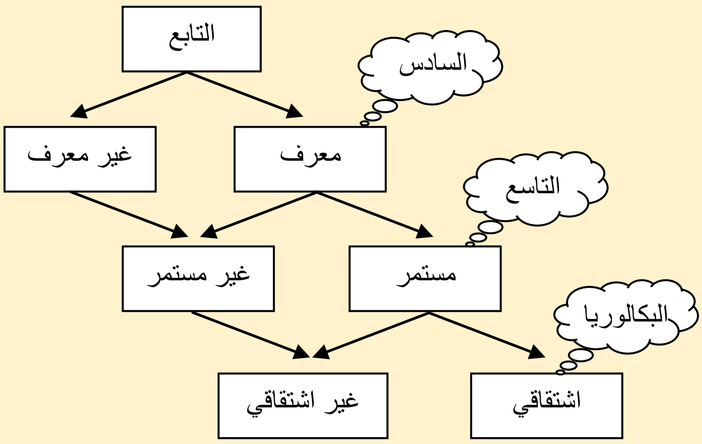
- $f(a)$: ارتفاع الخط البياني عند a.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$: ارتفاع الخط البياني عند a.
- $f'(a)$: ميل المماس للخط البياني عند a.
- حل المعادلة $f(x)=a$: الفواصل التي ارتفاعها a.
- حل المتراجحة $f(x)>a$: مجموعة الفواصل التي ارتفاعها أكبر تماماً من a.
- حل المتراجحة $f'(x)>0$: مجموعة الفواصل التي يكون الخط عندها متزايد تماماً.
- مجموعة التعريف تعني وجود الرسم على Ox
- مجموعة قيم التابع أو المستقر الفعلي $f(D)$ يعني وجود الرسم على المحور Oy .
- استمرار التابع عند a يعني اتصال الرسم عند a.
- اشتقاقية التابع عند a تعني وجود مماس غير شاقولي عند a.
- معادلة المستقيم (المقارب والمماس) هي $y=ax+b$.

حيث a ميل المستقيم ويساوي فرق تراتيب نقطتين منه على فرق فواصل نقطتين منه.

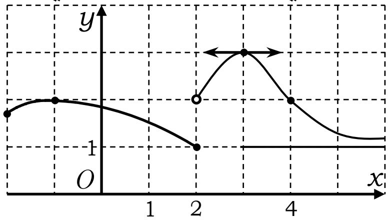
ويمكن كتابة معادلة المماس بالشكل

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

- إذا كان المماس افقي كان المشتق معدوم.
- إذا وجد مقارب افقي عند ∞ فلا يوجد عندها مقارب مائل عند ∞.
- العلاقة بين الاستمرار والاشتقاق:



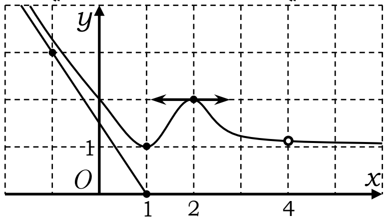
[1] ليكن $\mathscr{C}$ الخط البياني للتابع f المرسوم في الشكل المجاور



1. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)$.
2. جد معادلة المقارب الافقي.
3. هل f اشتقاقي عند 2؟ علل.
4. جد $f(3), f'(3)$. وجد معادلة المماس افقي.
5. هل $f(2)$ قيمة حدية محلياً؟ علل.
6. ما عدد القيم الحدية للتابع f ؟ اذكرها.
7. اكتب حلول المعادلة $f(x)=2$ ؟
8. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>2$ ؟

الحل:

[2] ليكن $\mathscr{C}$ الخط البياني للتابع f المرسوم في الشكل المجاور

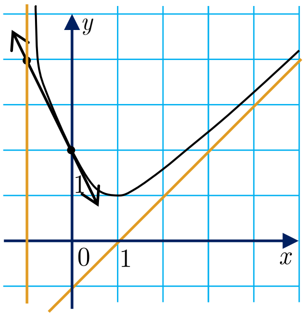


1. جد مجموعة تعريف التابع f .
2. جد مجموعة قيم التابع أي $f(D)$.
3. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to2} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$.
4. هل f اشتقاقي عند 2؟ علل.
5. جد معادلة المقارب المائل.
6. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+\frac{3}{2}x,$
7. اكتب حلول المعادلة $f(x)=2$ ؟
8. ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>2$ ؟

الحل:

....

[3] في الشكل المجاور خط بياني $\mathcal{C}$ لدالة f ، أجب عن الأسئلة:

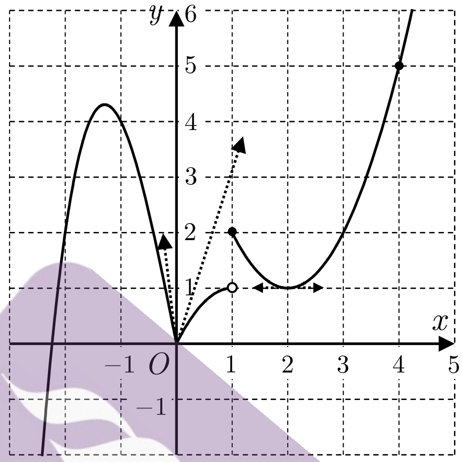


1. حدد مجموعة التعريف.
2. جد معادلة للمماس عند 0 .
3. جد تقريبا تآلفياً لـ $f(0.1)$
4. استنتج $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x}$.
5. جد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.
6. اكتب معادلة كل مقارب؟
7. جد حل المتراجحة $f'(x)\geq0$.
8. جد $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x$

الحل:

....

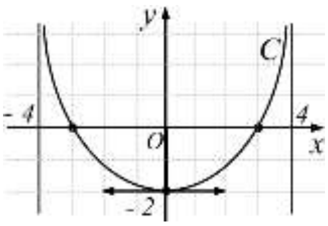
[4] ليكن $\mathscr{C}$ الخط البياني للتابع f المرسوم في الشكل المجاور



1. أوجد مجموعة تعريف التابع f .
2. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. ما عدد حلول المعادلة $f(x)=2$ ؟
4. هل $f(1)$ قيمة محلية كبرى أو صغرى للتابع علل ذلك؟
5. ما عدد القيم الحدية للتابع f ؟
6. أيكون التابع f اشتقاقياً عند $x=1$ ؟ وعند $x=0$ ؟
7. جد $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to2} \frac{f(x)-1}{x-2}$.

الحل:

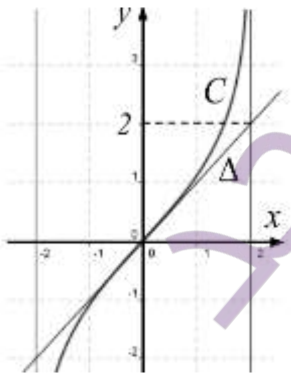
[5] (دورة $1-2017$) **في الشكل المجاور خط بياني C لتابع f :**



1. جد $\lim\limits_{x\to4} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-4} f(x)$
2. استنتج معادلة كل مقارب.
3. جد $f(0), f'(0)$.
4. جد حلول المعادلة $f(x)=0$.

الحل:

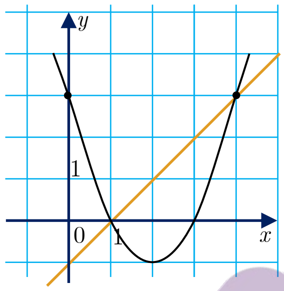
[6] (دورة $2-2017$) **في الشكل المجاور خط بياني C لتابع f :**



1. جد $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$
2. جد $f(0), f'(0)$.
3. هل التابع فردي أم زوجي.
4. اكتب معادلة للمماس Δ .

الحل:

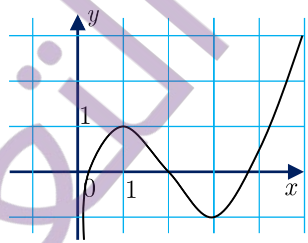
[7] (دورة 1 – 2018) **في الشكل المجاور خط بياني $\mathcal{C}$ لتابع f :**



1. دل على القيمة الصغرى المحلية.
2. جد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
3. ما حلول المعادلة $f(x)=y_\Delta$.
4. اكتب معادلة المستقيم Δ .

الحل:

[8] (دورة 2 – 2019) **في الشكل المجاور خط بياني $\mathcal{C}$ لتابع f :**

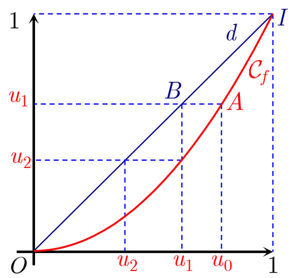


1. جد $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. دل على القيمة المحلية. وما نوعها
3. ما حلول المتراجحة $f'(x)\le 0$ ؟
4. جد $f([1,3])$.

الحل:

[9] لتكن المتتالية المعرّفة وفق

$u_0=0.8$ و $u_{n+1}=f(u_n)$:



1. حل المعادلة $f(x)=x$ حل $f(x)\le x$ ؟
2. ما جهة اطراد التابع f ؟
3. ما جهة اطراد $(u_n)_{n\ge 0}$ ؟
4. ما نهايتها المحتملة؟

2. مسائل حول جدول تغيرات التابع f :

[10] ((دورة 1 – 2019)) **ليكن جدول التغيرات الآتي:**

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	3

1. جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. ما معادلة المقارب الأفقي للخط $\mathcal{C}$ ؟
3. دل على القيمة الصغرى المحلية.
4. جد $f(]-1,2[)$.

الحل:

[11] الجدول الآتي يمثل تغيرات التابع f

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

1. أوجد مجموعة تعريف التابع f . جد مجموعة قيم التابع.
2. جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f(x), \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.
3. اكتب معادلة كل مقارب.
4. هل يوجد مقارب مائل عند $+\infty$.
5. اكتب معادلة كل مماس افقي.
6. هل $f(-1)$ قيم حدية ولماذا؟
7. اثبت أن $f(1)$ قيم حدية.
8. جد حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$.
9. أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على $]0,1[$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

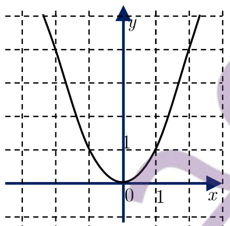
....

3. مسائل حول الخط البياني للتابع المشتق f' :

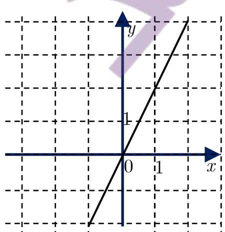
يمكن الاستفادة من الخط البياني للمشتق بما يلي:

- إذا كان الخط البياني للمشتق f' يقع فوق المحور Ox كان التابع f متزايد تماماً.
- إذا كان الخط البياني للمشتق f' يقع تحت المحور Ox كان التابع f متناقص تماماً.
- إذا كان قطع الخط البياني للمشتق f' المحور Ox أي انعدم المشتق كان المماس افقي عندها.

مثال: ليكن $f(x) = x^2$ وله الرسم

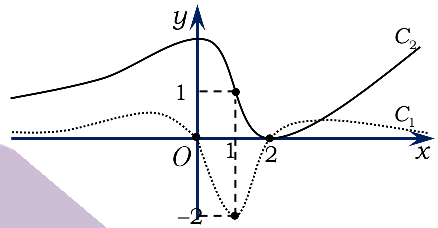


فيكون مشتق f هو $f'(x) = 2x$ وله الرسم



- نلاحظ أن الخط البياني للمشتق f' يقع فوق المحور Ox على المجال $[0,\infty[$ والتابع f متزايد تماماً.
- نلاحظ أن الخط البياني للمشتق f' يقع تحت المحور Ox على المجال $]-\infty,0]$ والتابع f متناقص تماماً.
- نلاحظ أن الخط البياني للمشتق f' قطع المحور Ox أي انعدم المشتق عند الصفر فالمماس افقي عند الصفر.

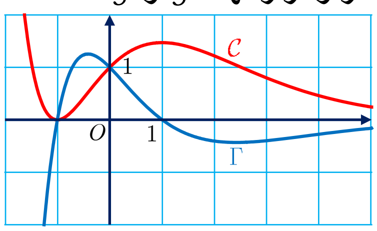
[12] في معلم متجانس رسمنا الخطين البيانيين C_1 و C_2 لتابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$. نعلم أنّ أحدهما مشتقٌ للآخر، لذلك يمكن أن نرمز إليهما f و f' .



1. أي من الخطين هو للتابع f وأي منهما لمشتقه.
2. جد $f(1)$ و $f'(1)$ ، وما عدد المماسات الأفقية ؟
3. اكتب معادلة للمماس عند 1 لخط التابع f .
4. جد تقريباً تآلفياً لـ $f(0.9)$.
5. حل المتراجحة $f'(x) < 0$ ؟

الحل:

[13] الخطّين البيانيَّيْن C و Γ لتابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$. وأحدهما مشتقٌ للآخر و نرمز لهما g و g' .

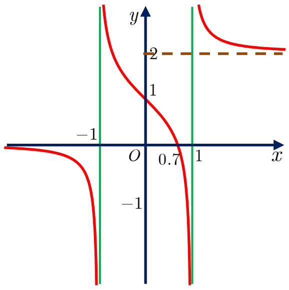


1. أيُّ هذين الخطّين هو الخط للتابع g وأيُّهما لمشتقه.
2. ما ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 0؟
3. اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 0
4. ما عدد المماسات الافقية. واكتب معادلة المماس عند -1

الحل:

[14] f تابع معرف على $\mathbb{R}$ ، و C' يمثّل الخط للتابع المشتق f' .

1. جد مجال تعريف f'
2. جد $f'(0)$ و $f'(0.7)$
3. هل يوجد مماس افقي للخط C
4. ادرس اطراد f على $]-\infty, 0[$



الحل:

سما المجد التعليمية